

等角写像法による前縁キャビテーションを伴う
遠心羽根車の特性解析*

辻本良信**, Acosta, A. J.***, Brennen, C. E.***

等角写像法による前縁キャビテーションを伴う 遠心羽根車の特性解析*

辻 本 良 信**, Acosta, A. J.***, Brennen, C. E.***

Analyses of the Characteristics of a Centrifugal Impeller with Leading Edge Cavitation by Mapping Methods

by Yoshinobu TSUJIMOTO, Allan J. Acosta, and Christopher E. Brennen

The characteristics of a centrifugal impeller under a condition with leading edge cavitation are analyzed by using conformal mapping methods. It is assumed that the thickness of the cavity is small, and linear cavity models are used. Concerning the treatment of the Bernoulli equation, two different models are considered. The first one is based on a full Bernoulli equation in a rotating frame. In the second model, the Bernoulli equation is linearized on the assumption that the disturbance due to cavity is small. The second model predicts shorter cavity, but the differences in the pressure distribution and in the head coefficient are small for the conditions with the same cavity length. The results of the first model are in general agreement with those by a singularity method and experiments.

Key Words: Cavitation, Conformal Mapping Methods, Leading Edge Cavitation, Centrifugal Impeller, Cavity Flow Model, Linearization, Closed Model

1. 緒 言

空どう発生下のポンプ性能の究明は工学的に重要な問題であるが、遠心羽根車に関しては従来主として実験的に研究が進められてきた^{(1)~(3)}。この理由として、羽根幅の小さい遠心羽根車では前部シュラウドの影響が大きく多様な空どう発生形態が見られることのほか、理論解析の面からは羽根による擾乱速度がすべて小さいとする微小擾乱の仮定が用いられないこと、押のけ流れの存在によりポテンシャル面への等角写像が利用できないことなどによると考えられる。

理論解析としては西山ら⁽⁴⁾のものが唯一見られるだけである。彼らは前縁空どうが発生した円形翼列について、特異点法により実験結果をよく説明する特性解析法を与えている。特異点分布として半閉鎖形線形空どうモデルによるものを用い、逐次近似によりベルヌーイ式および空どう厚さの評価式に現れる非線形項を処理している。

本研究では円形翼列から直線軸翼列を介して半平面

に等角写像し、写像面で Plemelj の式を適用する方法を用いる。空どうの厚さは十分小さいと仮定し、空どう表面の翼面に垂直な方向の擾乱速度を無視し空どう表面の境界条件は近似的に翼面上で与えるが、ベルヌーイ式の取扱いに関し次の二つのモデルを考える。まず最初にベルヌーイ式を線形化せずに用いたモデルを考える。上記の線形空どうモデルにベルヌーイ式を線形化せずに用いれば、空どう後端の下流に不可積分の圧力の特異性が現れる。本研究の計算例で示されるとおり、この特異性の直接的な影響は空どう後端とすぐ下流に見られるよどみ点とのあいだのせまい領域に現れ、その領域が空どう厚さと同程度としてこれを無視できるものとも考えられるが、これを回避するために次のモデルも検討する。すなわち擾乱速度を空どうが発生しない状態での速度成分と空どうによる擾乱に分離して考え、空どうによる擾乱速度が他に比べて十分小さいとしてベルヌーイ式を線形化して考える。このような線形化を用いれば、流量や羽根面による擾乱速度に関する非線形性を含みつつ空どう後端の圧力分布の不都合はさげられるが、空どうの擾乱に対する線形化の誤差が加わる。

本研究の線形空どう+非線形ベルヌーイ式モデルと西山らのモデルの主な相異点は、本研究では最も簡単

* 昭和61年4月2日 第63期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年9月2日。

** 大阪大学基礎工学部 (〒560 豊中市待兼山1-1)。

*** California Institute of Technology (Pasadena, CALIFORNIA 91125)。

な閉鎖形モデルを用いる点と、空どう厚さの評価式として翼面速度の変化を考慮しつつ空どう厚さに関する線形化を行った式を用いた点にある。本論文の方法では羽根車形状が対数らせん羽根車に限定される反面、最終的に数値的に決定すべき未知量の数は一割となり解析が簡単となる。

2. 記 号

- w : 相対速度
- $u_2 = r_2 \Omega$: 羽根車周速
- v' : 空どうおよび羽根面による擾乱速度
- $W = u - iv$: 写像面の速度
- β : 羽根角, $\gamma = \pi/2 - \beta$
- r_1, r_2 : 羽根車内外半径
- N : 羽根枚数
- c : 羽根面長さ
- l, l' : ω 面および物理面の空どう長
- ρ : 密度
- p_i : 吸込全圧
- p_c : 空どう圧力=飽和蒸気圧
- σ : キャビテーション係数
- $z = x + iy$: 物理面の座標
- $\omega = \phi + i\psi, \zeta = \xi + i\eta$: 写像面の座標
- $\Phi = Q/2\pi r_2 u_2$: 流量係数
- $\Psi = gH_{th}/u_2^2$: 揚程係数
- 添 字
- r, θ : r, θ 成分
- n, s : n, s 成分 ($n' = -n$)
- w : 空どうが生じない場合の成分
- c : 空どうによる擾乱成分

3. 空どうおよび翼面上の境界条件

図1に示すように $z = x + iy$ 面内におかれた羽根角 β , 内外径比 r_1/r_2 の対数らせん羽根車が流量 Q , 予旋回の循環 Γ_i のもとに角速度 Ω で回転する場合を考える。空どう上では圧力は飽和蒸気圧に等しいものと

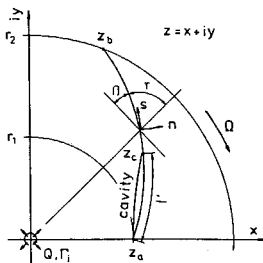


図1 対数らせん羽根車

すると、回転座標のベルヌーイ式より

$$\sigma = \frac{p_i - p_c}{\rho/2u_2^2} = \left(\frac{w_s}{u_2}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 \dots\dots\dots (1)$$

を得る。ただし σ はキャビテーション係数である。そこで空どう上の圧力に対する条件は、空どう上の相対速度 w_0 を用いて

$$w_0 = u_2 \sqrt{\sigma + \left(\frac{r}{r_2}\right)^2} \dots\dots\dots (2)$$

と表される。翼面の空どうのない部分では(以後単に翼面上と呼ぶ)相対速度の法線方向成分が零

$$w_n = 0 \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで相対速度 w は次の成分の和として表現できる。

- (i) 流量 Q , 予旋回 Γ_i による速度
 $w_r = Q/2\pi r, w_\theta = -\Gamma_i/2\pi r$
- (ii) 羽根車の回転による速度
 $w_r = 0, w_\theta = r\Omega$
- (iii) 空どうや翼面によるポテンシャル擾乱速度
 $w_r = v'_r, w_\theta = v'_\theta$

このとき、相対速度の羽根面に垂直な方向 (n) および接線方向 (s) の成分は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} w_n &= \frac{Q}{2\pi r} \cos \beta - \left(r\Omega - \frac{\Gamma_i}{2\pi r}\right) \sin \beta + v'_n \\ w_s &= \frac{Q}{2\pi r} \sin \beta + \left(r\Omega - \frac{\Gamma_i}{2\pi r}\right) \cos \beta + v'_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

そこで境界条件式(2)および(3)は擾乱速度 v' に対し

$$\left. \begin{aligned} \text{翼面上で} \\ v'_n &= -\frac{Q}{2\pi r} \cos \beta + \left(r\Omega - \frac{\Gamma_i}{2\pi r}\right) \sin \beta \\ \text{空どう表面上で} \\ v'_s &= u_2 \sqrt{\sigma + \left(\frac{r}{r_2}\right)^2} - \frac{Q}{2\pi r} \sin \beta \\ &\quad - \left(r\Omega - \frac{\Gamma_i}{2\pi r}\right) \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

となる。以降 v' を等角写像して考える。

4. 等 角 写 像

まず $z = x + iy$ 面の対数らせん羽根車を写像関数

$$\omega = Ne^{-i\gamma} \log(z/r_1) \dots\dots\dots (6)$$

により $\omega = \phi + i\psi$ 面の食違い角 γ , ピッチ 2π , 翼弦長 c' の直線翼列に写像する。 z 面と ω 面では流れの複素ポテンシャルが等しいものとする。このとき z 面の速度 v'_n, v'_s と ω 面の ϕ, ψ 方向速度 u, v は次式で関係付けられる。

$$v_n' = -\frac{N}{r}v, v_o' = \frac{N}{r}u \dots\dots\dots (7)$$

さらに ω 面の直線翼列を写像関数

$$\omega = e^{-i\gamma} \log \frac{1-\zeta/\zeta_1}{1-\zeta/\zeta_2} + e^{i\gamma} \log \frac{1-\zeta/\bar{\zeta}_1}{1-\zeta/\bar{\zeta}_2} \dots (8)$$

で ζ 面の実軸に等角写像する⁽⁵⁾。ただし、

$$\zeta_1 = e^{i(\pi/2-\varphi)}, \zeta_2 = ae^{i(\pi/2+\varphi)}$$

であり、写像定数 a, φ は次式より求まる。

$$\tan \varphi = \frac{a-1}{a+1} \tan \gamma$$

$$\frac{c}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cos \gamma \log a + \frac{2\varphi}{\pi} \sin \gamma$$

写像関数式(8)は ω 面を ζ 面の上半平面に等角写像し、翼前縁は $\zeta=0$ に、後縁は $\xi=\pm\infty$ に写像される。また $\zeta=\zeta_1, \zeta_2$ は $\phi=-\infty, +\infty$ に対応する。 ζ 面の実軸上では写像関数式(8)は次式となる。

$$\phi(\xi) = \cos \gamma \log \frac{1+\xi^2-2\xi \sin \varphi}{1+(\xi/a)^2+2(\xi/a)\sin \varphi} + 2 \sin \gamma \tan^{-1} \frac{(a-1)\xi \cos \varphi + \xi^2 \sin 2\varphi}{a-(a-1)\xi \sin \varphi + \xi^2 \cos 2\varphi} \dots\dots\dots (9)$$

ω 面と ζ 面の対応点では複素速度 $W = u-iv$ が等しいものと考える。

$$W(\omega) = W(\zeta) = u-iv \dots\dots\dots (10)$$

$z_a \sim z_b$ 間に生じた後面空どうの領域が、 $0 < \xi < l$ の区間に写像されるものとする、 ζ 面の複素速度に対する境界条件は次式で表現できる。

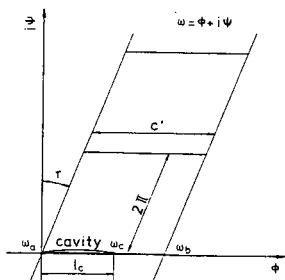


図2 ω 面

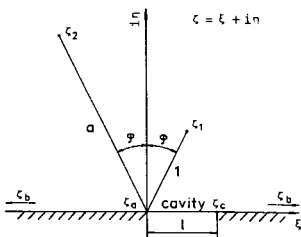


図3 ξ 面

$$\left. \begin{aligned} -\infty < \xi < 0; \operatorname{Im} W &= -v\{\phi(\xi)\} \\ 0 < \xi < l; \operatorname{Re} W &= u\{\phi(\xi)\} \\ l < \xi < +\infty; \operatorname{Im} W &= -v\{\phi(\xi)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで u, v は式(5), (7)で $r=r_1 e^{(\cos \gamma/N)\phi(\xi)}$ として与えられる。

5. 複素速度の表示式

ζ 面の上半平面で定義される複素速度 $W(\zeta)$ を、次式により下半平面に解析接続する。

$$W(\bar{\zeta}) = -\overline{W(\zeta)}, \operatorname{Im}(\zeta) > 0 \dots\dots\dots (12)$$

ここで $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W(\xi \pm i\epsilon) = W_{\pm}$ とすると、式(11)の境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} -\infty < \xi < 0; W_+ + W_- &= -2iv\{\phi(\xi)\} \\ 0 < \xi < l; W_+ - W_- &= 2iu\{\phi(\xi)\} \\ l < \xi < +\infty; W_+ + W_- &= -2iv\{\phi(\xi)\} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

ここで式(13)の同次解として

$$W_h = \sqrt{\xi(\xi-l)} \dots\dots\dots (14)$$

を考える。切れ目を $\eta=0, \xi < 0$ と $\eta=0, \xi > l$ に入れて一価化する。式(13)を満足する W に対し、関数 W/W_h は次の境界条件を満足する。

$$\left. \begin{aligned} -\infty < \xi < 0; \left[\frac{W}{W_h} \right]_+ - \left[\frac{W}{W_h} \right]_- &= \frac{2iv\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(\xi-l)}} \\ 0 < \xi < l; \left[\frac{W}{W_h} \right]_+ - \left[\frac{W}{W_h} \right]_- &= \frac{-2iu\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(l-\xi)}} \\ l < \xi < +\infty; \left[\frac{W}{W_h} \right]_+ - \left[\frac{W}{W_h} \right]_- &= \frac{-2iv\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(\xi-l)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

Plemelj の式より、上の境界条件を満足する特解は

$$\frac{W}{W_h} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{2iv\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(\xi-l)} \xi-\zeta} d\xi - \int_0^l \frac{2iu\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(l-\xi)} \xi-\zeta} d\xi - \int_l^{\infty} \frac{2iv\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(\xi-l)} \xi-\zeta} d\xi \right] \dots\dots\dots (16)$$

で与えられる。未定定数(実数) A, B を用い、通常の線形空どうモデル⁽⁶⁾と同じ特異性をもつ補関数を加えると、 $W(\zeta)$ の一般解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= \frac{\sqrt{\xi(\xi-l)}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{v\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(\xi-l)} \xi-\zeta} d\xi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^l \frac{u\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(l-\xi)} \xi-\zeta} d\xi - \int_l^{\infty} \frac{v\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(\xi-l)} \xi-\zeta} d\xi \right] \\ &\quad + \frac{A\xi+B}{\sqrt{\xi(\xi-l)}} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

上式で $\lim_{\xi \rightarrow \infty} W(\zeta) < \infty$ であり羽根後縁でクッタの条件を満足している。空どう長 l が与えられた場合を考えると、未知量は l を実現するための σ と A, B の三つであり、これらは次章の条件より決定される。

6. 流れ場の決定

6・1 上流の条件 式(7)はまた次式で表現される。

$$v'_x - iv'_y = (u - iv) \frac{Ne^{-i\gamma}}{z} \dots\dots\dots (18)$$

$z \rightarrow 0$ は $\zeta \rightarrow \zeta_1$ に対応するが、もし

$$W(\zeta_1) = 0 + 0i \dots\dots\dots (19)$$

でなければ、式(18)より流れは Q および Γ_i 以外の流量成分および予旋回成分を持つことになる。そこで式(19)の条件が満たされねばならない。

6・2 空どう閉鎖の条件 翼面に沿う座標 s および法線方向座標 n' をとり、空どう表面位置を $n' = \delta(s)$ とすると、空どう表面の運動学的条件は

$$w_{n'}(s, \delta(s)) = w_s(s, \delta(s)) \frac{d}{ds} \delta(s) \dots\dots\dots (20)$$

空どうの厚さが小さいとして $w_{n'}$ および w_s を展開し式(20)に用いると次式を得る。

$$w_{n'}(s, 0) = \frac{d}{ds} \{w_s(s, 0)\delta(s)\} \dots\dots\dots (21)$$

西山ら⁽⁴⁾は上式で $w_s = \text{const}$ と考えた条件を用いている。上式を積分すれば次式が得られる。

$$\delta(s) = \int_0^s w_{n'}(s, 0) ds / w_s(s, 0) \dots\dots\dots (22)$$

そこで空どうが閉じる条件は次式で与えられる。

$$\int_0^l w_{n'}(s, 0) ds = 0 \dots\dots\dots (23)$$

翼面の空どうのない部分では $w_{n'} = 0$ であること、 v' 以外の相対速度成分は翼面で不連続を持たないことを考慮すると、式(23)は次式で表現できる。

$$\text{Re}[W(\zeta_2)e^{-i\gamma}] = 0 \dots\dots\dots (24)$$

結局式(19)の実部、虚部に対する二つの条件および式(24)より未知量 σ, A, B が決定される。

6・3 流れ場の決定 いま、

$$\begin{aligned} & V_{R1,2}(\sigma) + iV_{I1,2}(\sigma) \\ &= \frac{\sqrt{\zeta_{1,2}(\zeta_{1,2} - l)}}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{v\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(\xi - l)}} \frac{d\xi}{\xi - \zeta_{1,2}} \right. \\ & \quad - \int_0^l \frac{u\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(l - \xi)}} \frac{d\xi}{\xi - \zeta_{1,2}} \\ & \quad \left. - \int_l^\infty \frac{v\{\phi(\xi)\}}{\sqrt{\xi(\xi - l)}} \frac{d\xi}{\xi - \zeta_{1,2}} \right] \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

とおくと、式(19)より

$$\left. \begin{aligned} A(\sigma) &= -(R_1^2 + I_1^2)H(\sigma)/G \\ B(\sigma) &= (R_1^2 + I_1^2)/I_1 \\ & \quad \times \{V_{I1}(\sigma) - (R_1 \sin \theta_1 - I_1 \cos \theta_1)H(\sigma)/G\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ただし、

$$H(\sigma) = I_1 V_{R1}(\sigma) + R_1 V_{I1}(\sigma)$$

$$\begin{aligned} G &= I_1(R_1 \cos \theta_1 + I_1 \sin \theta_1) \\ & \quad + R_1(R_1 \sin \theta_1 - I_1 \cos \theta_1) \\ \sqrt{\zeta_{1,2}(\zeta_{1,2} - l)} &= R_{1,2} + iI_{1,2} \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

を得る。さらに式(24)は、

$$\begin{aligned} F(\sigma) &\equiv (V_{R2}(\sigma)\cos \gamma + V_{I2}(\sigma)\sin \gamma)(R_2^2 + I_2^2) \\ & \quad + \{R_2 \cos \theta_2 + I_2 \sin \theta_2\}\cos \gamma \\ & \quad + \{R_2 \sin \theta_2 - I_2 \cos \theta_2\}\sin \gamma \\ & \quad \times aA(\sigma) + (R_2 \cos \gamma - I_2 \sin \gamma)B(\sigma) \\ &= 0 \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

を与え、これより σ が求まる。この σ を用いると式(26)より A, B が決まる。

羽根車に流入、流出する角運動量のバランスより、羽根車に作用するトルクは次式で与えられる。

$$T = \rho N Q \text{Im}[e^{-i\gamma} W(\zeta_2)] \dots\dots\dots (28)$$

そこで揚程係数 Ψ は

$$\Psi = \frac{TQ}{\rho Q u_2^2} = \frac{N}{Q r_2^2} \text{Im}[e^{-i\gamma} W(\zeta_2)] \dots\dots\dots (29)$$

で与えられる。また物理面の速度は式(4)に(7)、(17)を用いて与えられ、翼面圧力分布は相対座標のベルヌーイ式より得られる。

$$C_p = \frac{p - p_1}{(\rho/2)u_2^2} = \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 - \left(\frac{w_2}{u_2}\right)^2 \dots\dots\dots (30)$$

より求まる。

式(17)の速度は ζ 面の前縁および空どう後端で $\zeta^{-1/2}, (\zeta - l)^{-1/2}$ の特異性を持ち、これらは物理面でそれぞれ $(z - z_a)^{-1/4}, (z - z_c)^{-1/2}$ の特異性となる。ベルヌーイ式が線形化されている場合(圧力が速度に比例)にはいずれの点でも圧力は可積分であるが、線形化されていない場合には空どう後端の下流側に $(s - l)^{-1}$ の不可積分の圧力の特異性が現れる。これは線形空どうモデルに対して非線形のベルヌーイ式を適用しているためと考えられる。

以上の諸式は後面空どうに対するものであるが、前面空どうに対しては $l < 0$ とし、積分区間をこれに応じて入れ換えれば全く同様に解析できる。

7. 線形化モデル

本章では擾乱速度 v' を空どうが発生しないときの擾乱速度 v'_w と、空どうの発生によって加わる擾乱速度成分 v'_c に分離し、 $v'_c \ll v'_w$ としてベルヌーイ式を線形化したモデルを考える。いま式(4)で $v' = v'_w + v'_c$ とし、 v'_w 成分が翼面全体で相対速度の法線方向成分零の境界条件を満足することを考えると、翼面の空どうが生じていない部分での境界条件は

$$\left. \begin{aligned} v'_{nw} &= -\frac{Q}{2\pi r} \cos \beta + \left(r\Omega - \frac{\Gamma_i}{2\pi r} \right) \sin \beta \} \dots (31) \\ v'_{nc} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

となることがわかる。また回転座標のベルヌーイ式で、 $w = w_s = w_{ws} + v'_{sc}$ とし、 $v'_{sc} \ll w_{ws}$ として線形化すれば、空どう上の境界条件として

$$v'_{sc} = -\frac{u_2^2}{2} \left\{ \sigma + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right\} / w_{ws} - \frac{1}{2} w_{ws} \dots (32)$$

を得る。ただし

$$w_{ws} = \frac{Q}{2\pi r} \sin \beta + \left(r\Omega - \frac{\Gamma_i}{2\pi r} \right) \cos \beta + v'_{sw}$$

は空どうを生じない場合の翼面方向相対速度である。

7.1 空どうを生じない場合の流れ 前章までの解析で $l \rightarrow 0$ とすれば写像面の複素速度は

$$W_w = -\frac{\zeta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_w \{\phi(\xi)\}}{\xi(\xi-\zeta)} d\xi + A_w + B_w/\zeta \dots (33)$$

となる。ただし $v_w \{\phi(\xi)\}$ は式(31)-1より、

$$v_w = -\frac{r}{N} \left[-\frac{Q}{2\pi r} \cos \beta + \left(r\Omega - \frac{\Gamma_i}{2\pi r} \right) \sin \beta \right] \dots (34)$$

で与えられる。 v_w は翼両面の対応点で等しい値を持つので空どうの閉鎖条件式(24)は常に満足され、二つの未知量 A_w, B_w は羽根車上流の条件式(19)より決定される。

7.2 空どうによるじょう乱速度 式(31)-2と式(32)の境界条件およびクッタの条件を満足する複素速度は、前章までの解析と同様にして後面空どうに対して次式で与えられる。

$$W_c = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta-l}{\zeta}} \int_0^l \frac{\xi}{\sqrt{l-\xi}} \frac{u_c(\xi)}{\xi-\zeta} d\xi + \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-l}} \left(A_c + \frac{B_c}{\zeta} \right) \dots (35)$$

ただし $\sqrt{\zeta-l}, \sqrt{\zeta}$ は $\eta=0, \xi < 0$ と $\eta=0, \xi > l$ に切れ目を入れて考え、 $u_c(\xi)$ は式(32)より

$$u_c(\xi) = \frac{r}{N} \left[\frac{u_2^2}{2} \left\{ \sigma + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right\} / w_{ws} - \frac{1}{2} w_{ws} \right] \dots (36)$$

で与える。空どう長 l が与えられるものとし、未知量を A_c, B_c および σ と考えると、これらは羽根車上流の条件式(19)と空どう閉鎖の条件式(24)を W_c に対して用いることにより決定できる。これらの条件は6.3節で述べたのと同様、最終的には σ に対する一つの条件として表され、これを解くことにより流れが求まる。

7.3 特異性の検討 式(35)の流れ場の特異性を調べる。式(33), (36)より式(35)中の $u_c(\xi)$ は $\xi \rightarrow 0$

に対し

$$u_c(\xi) \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{B_w}{\xi}$$

の特異性を持つことがわかる。式(14)に対応する同次解として $\sqrt{(\zeta-l)/\zeta}$ を選んだのはこのような $u_c(\xi)$ に対して収束積分を得るためである。このとき式(35)の積分項は $\zeta \rightarrow 0$ に対し $(-1/2)(B_w/\zeta)$ の特異性もち、 $\zeta \rightarrow l$ に対しては特異性を持たないことがわかる。補関数は $\zeta \rightarrow 0$ に対し $B_c/\sqrt{-l\zeta}$ 、 $\zeta \rightarrow l$ に対し $(A_c\sqrt{l} + B_c/\sqrt{l})/\sqrt{\zeta-l}$ の特異性をもつ。空どう後端の特異性は前章までのモデルと同様通常の線形空どうモデルの特異性に等しく、線形化したベルヌーイ式を用いれば圧力は可積分となる。空どうが生じない場合の流れ W_w は、式(33)よりわかるように翼前縁に B_w/ζ の特異性を持つが、その1/2だけが W_c により相殺される。この特異性は物理面では $z^{-1/2}$ のオーダーの特異性に対応し、前縁で角をまわる流れを表す。ベルヌーイ式を線形化しない場合には前縁には負の無限大の圧力が作用し、いわゆる前縁吸引力が作用する。これに対しベルヌーイ式を線形化した現在のモデルでは、Blasiusの公式において

$$W^2 = (W_w + W_c)^2 \sim W_w^2 + 2W_w W_c \sim \frac{B_w^2}{\zeta^2} + 2\frac{B_w}{\zeta} \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{B_w}{\zeta} \right) = 0$$

となり、前縁吸引力の原因となる $1/\zeta^2 \sim 1/z$ の特異性が消えるため、前章のモデルあるいは他の通常の前縁空どうモデルと同様前縁吸引力を生じず、前縁付近後面側の圧力も可積分となる。式(32)の代わりに線形化しないベルヌーイの式より得られる。

$$v'_{sc} = u_2 \sqrt{\sigma + \left(\frac{r}{r_2} \right)^2} - w_w \dots (37)$$

を用いれば W_w の $1/\zeta$ の特異性は W_c により完全に相殺され全体の流れの特異性は前章までのものに等しくなり、等価なモデルを与える。前面空どうの場合には $l < 0$ とし、

$$W_c = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta-l}{\zeta}} \int_l^0 \frac{\xi}{\sqrt{l-\xi}} \frac{u(\xi)}{\xi-\zeta} d\xi + \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-l}} \left(A_c + \frac{B_c}{\zeta} \right) \dots (38)$$

を用いればよい。

回転座標のベルヌーイの式を線形化することにより翼面圧力分布は次式で与えられる。

$$C_p = \left\{ \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{w_{ws}}{u_2} \right)^2 \right\} - 2 \frac{w_{ws}}{u_2} \frac{v'_{sc}}{u_2} \dots (39)$$

8. 数値計算

流れは式(27)あるいは線形化モデルの場合にはこれに対応する式を試算法により解けば求まるが、いずれの場合も式(27)あるいはこれに対応する式に含まれる積分を数値的に求めねばならない。この積分は $\xi=0, 1$ に特異点を持つが、これらの特異点および $\xi=\pm\infty$ 付近の積分は解析的に評価し、他の区間の積分は数値積分で評価した。数値積分にはシンプソンの公式を用い、積分ピッチを1/2にした場合の積分値の変化が、積分値の0.5%以下となるようにした。西山ら⁽⁴⁾の結果と比較するため、 $\beta=22^\circ, N=5, r_1/r_2=0.523$ の対数らせん羽根車に対し、予旋回のない場合について計算を行った。

図4, 5に、キャビテーション係数 σ と空どう長 l'/c の関係を示す。ただし l' は物理面での空どう長、 c は翼の長さである。ベルヌーイ式を線形化しないモデル(非線形化モデルと称す)に対し西山ら⁽⁴⁾の結果と比較した。本研究のモデルでは前面空どうおよび後面空どうの場合で l'/c が小の場合には西山らのモデルに比べて空どう長が短めになっているがその差は小さい。前面空どうの場合には σ の低下に伴って翼後面中央部で圧力が飽和蒸気圧以下となる場合が生じるが、このような部分を破線で示した。また $\phi=0.15$ では一つの σ に対して二つの空どう長がみられるが、大きいほうの空どう長を表す部分を破線で示した。キャビテーション係数の低下に対する空どう長の増加率は後面空どうのほうが大きい。図5に示した線形化モデルの場合には、全般的な傾向は非線形化モデルのものに一致するが、等しい σ に対し空どう長は短くなってい

る。これはベルヌーイ式の線形化により等しい速度に対して圧力が常に高めに計算されるためであり、図4中に示したように式(32)の代わりに式(37)を用いると非線形化モデルの結果に一致した空どう長が得られる。

図6, 7に翼面圧力分布を示す。図6で西山ら⁽⁴⁾の結果と比較した。若干の違いは見られるもののほぼ一致した結果が得られている。後面空どうの場合には前面の圧力は空どうの影響をほとんど受けないのに対し、前面空どうの場合には空どうが生じていない半径位置でも翼両面の圧力が空どうの成長に伴って低下している。これは翼前面では前縁付近から翼間通路部を形成するため空どうによるブロック効果が強く現れることによると考えられる。

図6の非線形化モデルの場合には、空どう後端のすぐ下流に、圧力が羽根車と同じ角速度をもつ強制うずのそれと等しくなるよどみ点が現れているが、その位置は空どう後端に極めて近い。前述のように空どう下流から空どう後端に近付けば、空どう後端の特異性により圧力は負の無限大に近付きその積分値は有限とならないが、空どうの厚さに関して線形化している現在のモデルでは、空どう後端とすぐ下流のよどみ点とのあいだの圧力は物理的意味をもたないものと考えられる。

図7に線形化モデルの圧力分布を示す。空どう近傍をのぞけば等しい空どう長に対して非線形化モデルのものに極めて近い圧力分布をもつ。前面空どうの $l'/c=0.4$ の場合には後面の大部分で圧力は飽和蒸気圧以下となるためこの部分を破線で示した。

図8に空どう長と揚程係数の関係を示す。後面空どうの場合には揚程係数は空どう長が増えてもほとんど変化しない。実験⁽¹⁾⁽²⁾でみられる低流量時のキャビテ

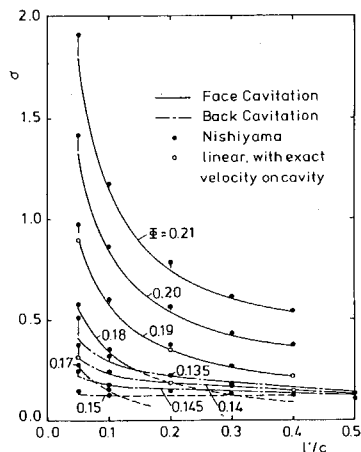


図4 キャビテーション係数と空どう長さ (非線形化モデル)

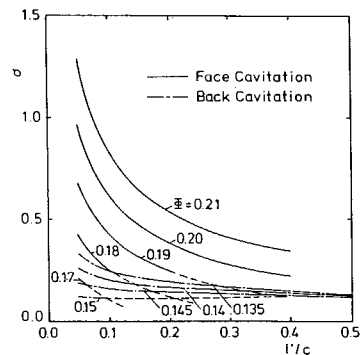


図5 キャビテーション係数と空どう長さ (線形化モデル)

ーション発生による揚程の低下は、後面空どうが十分発達した後に前面空どうも発生して始めて生じるものと考えられる。これに対し前面空どうの場合には $l'/c > 0.2$ で揚程係数は急速に低下する。西山ら⁽⁴⁾の結果では空どう長の増大に伴い揚程係数は一度わずかに増加した後に減少しているが、本研究の結果では単調に減少している。また後面空どうの場合に西山らの結果にみられる Ψ の微妙な変化は本研究結果では見られない。線形化モデルでは前面空どうで l'/c が大の場合に Ψ が若干小さくなるが違いがわずかである。線形化モデルに式(37)を用いた結果も図中に示した。非線形化モデルから与えられる揚程に一致している。

図9で、前面空どうの場合の流量係数と揚程係数の関係を、実験値⁽⁴⁾および西山らの理論値⁽⁴⁾と比較した。

実験に用いられた羽根車は、羽根数および側板側の羽根角と内外径比は計算のものに等しいが、羽根幅は半径方向に若干変化し翼厚もつため、キャビテーションを生じないときの特性および無衝突流入流量 Φ_0 は理論のもの異なる。無衝突流入流量とキャビテーション発生により Ψ が低下し始める流量の関係および Ψ の低下の様子には、理論と同一傾向がみられる。図4, 5および8の結果から推察されるように、線形化モデルでは等価的に σ を大きくとった場合のような特性が得られている。

以上のように線形化モデルでは、空どう上の擾乱速度が必ずしも小さくないため、等しい σ に対して短めの空どう長を与えるが、等しい空どう長に対しては揚程係数や空どう近傍以外での圧力分布は非線形化モデ

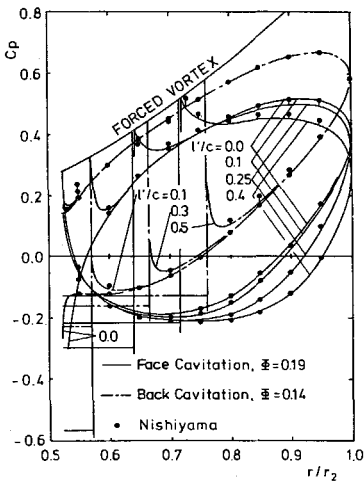


図6 翼面圧力分布 (非線形化モデル)

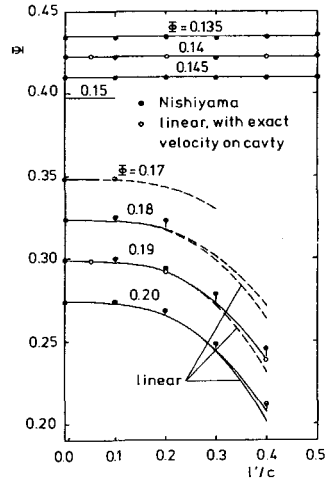


図8 空どう長と揚程係数の関係

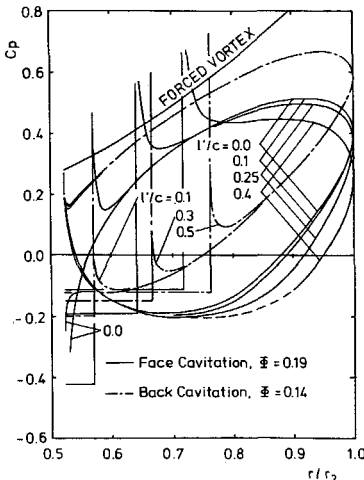


図7 翼面圧力分布 (線形化モデル)

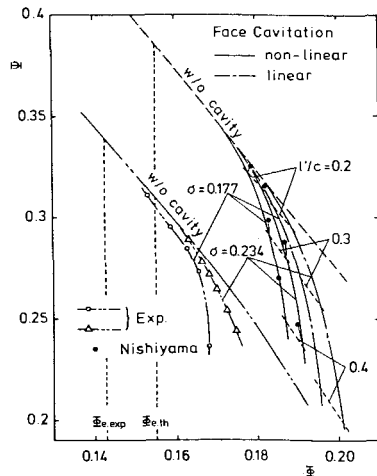


図9 流量係数と揚程係数の関係

ルのものに近い。そこでベルヌーイ式を、擾乱の大きい空どう上の点に対しては非線形のまま、その他の点に対しては線形化して適用するものとするれば、不可積分の圧力の特異性を回避しつつ非線形化モデルの場合と等しい空どう長と揚程係数、近似的に等しい圧力分布が得られる。線形化モデルでも空どう後端下流に、図7に見られるようによどみ点圧以上の圧力が現れることを考えると、実用上は非線形化モデルにおいて空どう後端の圧力の特異性を無視して考えるのが簡単かつ妥当であると思われる。

9. 結 言

等角写像法を用いて前縁キャビテーションを伴う遠心羽根車の特性を解析した。空どうモデルとしては空どうの厚さが小さいとした線形モデルを用い、空どうの後端が閉じると仮定した閉鎖形モデルを採用した。遠心羽根車内では速度は半径位置により大きく変化し、また羽根による擾乱速度も一般に大きいことから、ベルヌーイ式を非線形のまま用いたモデルと、空どうによる擾乱速度が、他の成分に比べて小さいとして線形化したモデルを考えた。その結果次のことがわかった。

- (1) 線形化モデルでは非線形化モデルに比べ等しい σ に対して空どう長は短くなるが、空どう長を同一にしたときの圧力分布や揚程係数はほぼ等しい。
- (2) 本研究の非線形化モデルと、半閉鎖形キャビティモデルに特異点法を用いた解析⁽⁴⁾では、(3)、

(4)のようなほぼ一致した結果が得られる。

(3) 無衝突流入流量より小さい流量の場合に生じる後面空どうでは、キャビテーション係数の減少に対する空どう長の増加割合が大きい。空どう発生による圧力分布の変化は空どう近傍に限られ、空どう発生による揚程変化はほとんど生じない。

(4) 前面空どうではキャビテーション係数の減少に対する空どう長の増加割合は比較的小さいが、空どうの成長に伴って揚程係数は急速に低下する。空どうの排除効果により、羽根後面および前面の空どう下流の圧力が低下する。

(5) 文献(4)では空どう長の増加に伴い最初揚程係数がわずかに増大し後に減少する興味深い結果が得られているが、本研究の結果では単調に減少する。

本研究は著者の一人が、山田科学振興財団のご援助のもとに、カリフォルニア工科大学に滞在中に始めたものである。財団のご援助に感謝するとともに、終始暖かい激励をいただいた大阪大学名誉教授今市憲作先生に感謝の意を表す。また、卒研究生として労をおしまぬご助力をいただいた芝本祥孝氏に感謝する。

文 献

- (1) 南・ほか2名, 機誌, 62-485 (昭34), 65.
- (2) 葛西・高松, 機論, 29-201 (昭38), 860.
- (3) 妹尾・ほか4名, 機論, 41-350 (昭50), 289.
- (4) 西山・植木, 機論, 49-441, B (昭58), 931.
- (5) Wade, R. B., *Caltech Report*, E-79-4 (1963).
- (6) Wade, R. B., *J. Ship Res.*, 11 (1967), 20.

討 論

〔質問〕 島 章・富田幸雄

〔東北大学高速力学研究所〕

遠心羽根車の特性を詳細に解析し、有益な結論を得られたことに対して敬意を表する。

- (1) 結論(5)に示されている既存の結果との差異について物理的な説明をお願いしたい。
- (2) 図8における点線の意味は何か。

〔回答〕 (1) 弱いキャビテーションが生じた場合の揚程増大の原因として、キャビテーション発生による入口部逆流域の縮小、過大流量時の前縁付近の負の仕事の減少、最大相対速度の減少に伴った境界層厚の減少、前縁付近の流れの改善による境界層厚減少などが考えられているが場合によって異なるように思える。このような物理的解釈との具体的関係はよくわか

らないが、閉鎖形キャビティモデルと半閉鎖形キャビティモデルの違いによると思われる。

(2) 説明不足をおおびする。図4、図5と同様、仮定したキャビティ以外の部分で圧力がキャビティ圧より低下した場合を破線で示した。

〔質問〕 鈴木昭次〔(株)荏原製作所〕

興味ある研究を遂行され、有用な成果を挙げられたことに敬意を表す。

遠心羽根車において羽根幅が小さい場合に、前部シュラウドの影響によって多様な空洞発生が見られるが、この点について貴解析法は発生形態に定量的解答を与えることが可能であろうか。

〔回答〕 シュラウド部の空洞発生を完全に無視した本解析は実機での空洞発生形態との対応においては

あくまでも定性的なものとお考えいただきたい。しかし、空洞発生に伴った性能の低下は、前面空洞の発生・成長と密接に関係しているものと思われ、シュラ

ウド部空洞発生下においても前面または後面空洞長と揚程の関係については、定量的にもある程度実際に近い結果を与えるのではないかと期待している。
