49

RELATIVITÉ GÉNÉRALE. — *Équations des contraintes sur une variété non compacte.*

Note (*) de Yvonne Choquet-Bruhat, Arthur Fisher et Jerzold Marsden, présentée par M. André Lichnerowicz.

Nous donnons une méthode nouvelle et très simple, valable dans le cas non conpact, pour montrer que les solutions des équations des contraintes sur une 3-variété donnée forment une variété modelée sur l'ensemble des solutions des équations linéarisées, au voisinage de toute solution (g, k) telle que $\operatorname{tr} k =$ Cte.

We give a new and very simple method, also valid in the non compact case, to prove that every asymptotically flat solution of the constraint equations on a manifold diffeomaphic to R^3 is linearization stable.

NOTATIONS. — Une donnée initiale en relativité générale est une variété différentielle S de dimension 3 munie d'une métrique proprement riemanienne g et d'un tenseur symétrique k d'ordre 2, satisfaisant sur S les « équations des contraintes » suivantes :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \mathscr{H}(g, k) \equiv R(g) - k.k + (\operatorname{tr} k)^2 = 0, \\ \mathscr{J}(g, k) \equiv \delta_g k - d \operatorname{tr} k = 0. \end{cases}$$

Pour abréger on note

$$\Phi(g, k) \equiv (\mathscr{H}(g, k), \mathscr{J}(g, k)).$$

$R(g)$ est la courbure riemanienne scalaire de g. Il est plus commode de considérer k comme tenseur mixte, de composantes k^j_i en coordonnées locales. On a alors $k.k = k^j_i k^i_j$, $\operatorname{tr} k = k^i_i$, $(\delta_g k)_j = \nabla_i k^i_j$, où ∇ est la dérivation covariante associée à g, $(d \operatorname{tr} k)_j = \partial_j k^i_i$.

On désigne par $W^p_{s,\delta}$, espace de Sobolev avec poids, la complétion de l'espace des fonctions C^∞ a support compact sur $S = R^3$ pour la norme

$$\|f\|_{W^p_{s,\delta}} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|(1+|x|^2)^{(\delta+|\alpha|)/2} D^\alpha f\|_{L^p(R^3)}.$$

On désignera par $E = S^p_{s,\delta}$ [resp. $F = M^p_{s-1,\delta+1}$] l'espace de Sobolev avec poids de sections du fibré des 2-tenseurs covariants symétriques [resp. mixtes] sur $S = R^3$ dont chaque composante est dans $W^p_{s,\delta}$ [resp. $W^p_{s-1,\delta+1}$]. Ces espaces permettent de traduire de façon commode les hypothèses physiques habituelles de comportement asymptotique euclidien : $g - \gamma = 0(1/r)$ (avec γ métrique euclidienne), $k = 0(1/r^2)$, quand on suppose $p > 3$, $s > 1 + 3/p$, $\delta \geqq 0$, ce qui assure les propriétés multiplicatives, avec continuité :

si $f \in W^p_{s,\delta}$, $h \in W^p_{s-l,\delta+l}$, $0 \leqq l \leqq s$, alors $fh \in W^p_{s-l,\delta+l}$;

si $f \in W^p_{s-1,\delta+1}$, $k \in W^p_{s-1,\delta+1}$, alors $fk \in W^p_{s-2,\delta+2}$.

Les espaces sont le cadre de l'étude sur les noyaux des opérateurs elliptiques de Nirenberg-Walker ([9]), et des théorèmes d'isomorphisme de Cantor [([1]), ([2])].

DIFFÉRENTIELLE DE L'APPLICATION Φ. — Il résulte les propriétés des espaces $W^p_{s,\delta}$, a que l'application . Φ

$$\Phi : \mathscr{E} \times F \to G \times H \text{ par } (g, k) \mapsto \Phi(g, k) \equiv (\mathscr{H}(g, k), \mathscr{J}(g, k))$$

est une application C^∞, si $\mathscr{E} = m^p_{s,\delta}$ désigne le cone ouvert des métriques proprement riemaniennes g telles que $g-\gamma \in E$ tandis que

$$G = {}_1W^p_{s-2,\delta+2}, \qquad H = X^p_{s-2,\delta+2}$$

sont respectivement un espace de fonctions sur $S = R^3$ et un espace de sections du fibré tangent à $S = R^3$ avec des normes de Sobolev avec poids correspondant à leurs indices.

La différentielle $\Phi'_{g,k}$ de Φ au point (g, k) est l'application linéaire $E \times F \to G \times H$ définie par

$$\Phi'_{g,k}(h, w) \equiv (A_{g,k}(h, w), a_{g,k}(h, w)),$$

avec

$$A_{g,k}(h, w) \equiv -\Delta_g \operatorname{tr} h + \delta_g \delta_g h - \operatorname{Ricc}(g).h - 2k.w + 2 \operatorname{tr} k \operatorname{tr} w,$$

$$a_{g,k}(h, w) \equiv \delta_g w - d \operatorname{tr} w + \frac{1}{2} k.d \operatorname{tr} h - \frac{1}{2} k.\nabla h,$$

où

$$(k-d \operatorname{tr} h)_j = k^l_j \partial_l h^l_l, \qquad (k.\nabla h)_j = k^l_i \nabla_j h^i_l.$$

Stabilité par linéarisation. — On dit qu'une donné initiale (S, g, k) est stable par linéarisation relativement à $E \times F$ si il existe un voisinage U de (g, k) dans $E \times F$ tel que $U \cap \varphi^{-1}(0)$ soit une sous-variété de $E \times F$ modelée sur l'espace des solutions dans $E \times F$ des équations « linéarisées », $\Phi'_{g,k}(h, w) = 0$.

La stabilité par linéarisation des données initiales de l'espace temps de Minkovski (alors appelée stabilité initiale) a été démontrée par des méthodes conformes par Choquet-Bruhat et Deser ([3]) puis par une méthode directe par Fisher et Marsden ([4]) qui ont aussi établi des résultats dans le cas S compacte, complétés par Montcrief ([7]). O'Murchada et York ([8]) ont d'autre part appliqué la méthode conforme au cas compact. Nous établirons ici un résultat de stabilité par linéarisation dans le cas général non compact, asymptotiquement euclidien, par une méthode inspirée à la fois des deux méthodes précédentes. Nous montrerons que $\Phi^{-1}(0) \cap U$ est une sous variété de $E \times F$ en prouvant que Φ est une submersion, c'est-à-dire que Φ' est surjective et à noyau complémentable, mais nous nous inspirerons du découplage des contraintes par la méthode conforme [*cf.* ([a])] pour obtenir ce résultat : le théorème de décomposition (Berger-Ebin) du cas compact n'est pas valable ici.

Surjectivité de Φ'. — Si on pose

$$(2) \qquad h = \frac{1}{3} g\tau, \qquad w = L(X, g) - g\delta_g X - \frac{1}{2} k\tau + \frac{1}{6} g \operatorname{tr} k\tau,$$

($L(X, g)$ dérivé de Lie de g par rapport au champ de vecteurs X, δ_g divergence, τ scalaire, (on a $\operatorname{tr} h = \tau$, $\operatorname{tr} w = -\delta_g X$) on a (avec $\Delta_g = \nabla_i \nabla^i$) :

$$A_{g,k}(h, w) \equiv -\frac{2}{3}\Delta_g \tau - \frac{1}{3} R(g)\tau + k.k\tau - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} k)^2 \tau - 2k.L(X, g),$$

$$a_{g,k}(h, w) \equiv \delta_g L(X, g) - \frac{1}{2}\tau\left(\delta_g k - \frac{1}{3} d \operatorname{tr} k\right).$$

Compte tenu des contraintes ces expressions deviennent

$$A_{g,k}(h, w) \equiv -\frac{2}{3}\Delta_g \tau + \frac{2}{3} k.k\tau - 2k.L(X, g),$$

$$a_{g,k}(h, w) \equiv \delta_g L(X, g) - \frac{1}{3}\tau d \operatorname{tr} k.$$

Si $d \operatorname{tr} k = 0$, $a_{g,k}$ ne dépend pas de τ : un cas particulier est celui où S est maxima dans l'espace temps engendré par (S, g, k), c'est-à-dire $\operatorname{tr} k = 0$. On sait que la propriété d'admettre une sous-variété telle que $\operatorname{tr} k = \mathrm{Cte}$ est une propriété stable pour un espace temps.

LEMME. — *L'application* $X \mapsto \delta_g L(X, g)$ *est un isomorphisme de* $X^p_{s,\delta}$ *sur* $X^p_{s-2,\delta+2}$, *si* $S = \mathbf{R}^3$.

Preuve. — Cette application est définie par un système elliptique du deuxième ordre. D'une part ce système se réduit pour $g = \gamma$ a un opérateur à coefficients constants qui est un isomorphisme $X^p_{s,\delta} \to X^p_{s-2,\delta+2}$. En effet :

$$(\delta_\gamma L(X, \gamma))_j \equiv \partial_i(\partial_i X_j + \partial_j X_i) = a_j \in W^p_{s-2,\delta+2}$$

a une solution et une seule :

$$X_j = \Delta_\gamma^{-1}\left(a_j - \frac{1}{2}\partial_i \partial_j \Delta_\gamma^{-1} a_i\right) \in W^p_{s-2,\delta+2},$$

(on sait [*cf.* (11)] que Δ_γ est un isomorphisme $W^p_{s,\delta} \to W^p_{s-2,\delta+2}$).

D'autre part si $g \in \mathcal{E}$ l'opérateur $X \mapsto \delta_g L(X, g)$ est injectif. En effet (11).

$$\int_{S=\mathbf{R}^3} X.\delta_g L(X, g)\, d\mu(g) = \int_{S=\mathbf{R}^3} LX.LX\, d\mu(g), \qquad \text{si} \quad X \in X^p_{s,\delta},$$

donc $\delta_g L(X, g) = 0$ implique $LX = 0$, or ce système différentiel n'a pas de solutions non nulles tendant vers zéro à l'infini.

Un théorème annoncé par Cantor (2) implique le lemme.

Soit alors $(B, b) \in W^p_{s-2,\delta+2} \times X^p_{s-2,\delta+2}$. Soit $X \in X^p_{s,\delta}$ tel que

$$a_{g,k}(h, w) \equiv \delta_g L(X, g) = b.$$

Le théorème de Cantor implique à nouveau qu'il existe $\tau \in W^p_{s,\delta}$ unique tel que

$$A_{g,k}(h, w) \equiv \frac{2}{3}\Delta_g \tau - \frac{2}{3} k.k\tau - 2k.L(X, g) = B.$$

L'application $\Phi'_{g,k}$ est donc surjective si $\operatorname{tr} k = \mathrm{Cte}$.

Il résulte aussi du raisonnement précédent que tout couple (h, w) admet une décomposition unique continue

$$(h, w) = (h_1, w_1) + (h_2, w_2),$$

avec $\Phi'_{g,k}(h_1, w_1) = 0$ et (h_2, w_2) de la forme (2). Donc *le noyau de* $\Phi'_{g,k}$ *est complémentable.*

D'où ; sous les propriétés d'isomorphisme des opérateurs elliptiques utilisées ci-dessus :

THÉORÈME. — *Toute donnée initiale* $(\mathbf{R}^3, g, k)$, $g \in m^p_{s,\delta}$, $k \in S^p_{s-1,\delta+1}$ *satisfaisant les contraintes et telle que* $\operatorname{tr} k = \mathrm{Cte}$ *est stable par linéarisation.*

(*) Séance du 8 décembre 1976.

(1) M. CANTOR, *Indiana University Math. J.*, 24, 1975, p. 897-902.

(2) M. CANTOR, *Some Problems of Global Analysis on Asymptotically Simple Manifolds* (preprint).

(3) Y. CHOQUET-BRUHAT et S. DESER, *Comptes rendus*, 275, série A, 1972, p. 1019; *Ann. Phys.*, 81, 1973, p. 165-178.

(4) Y. CHOQUET-BRUHAT, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 169.

(5) A. FISHER et J. MARSDEN, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79, 1973, p. 995-1001; *Proc. Symp. Pure Math, Amer. Math. Soc.*, 27, 1975, p. 219-263.

(6) A. LICHNEROWICZ, *J. Math. pures et appl.*, 23, 1944, p. 37-63.

(7) V. MONTCRIEF, *J. Math. Phys.*, 1975.

(8) N. O. MURCHADA et J. YORK, *Phys. Rev.*, D, 10, 1974, p. 437-446.

(9) L. NIRENBERG et M. WALKER, *J. Math. Ann. and appl.*, 47, 1973, p. 271-301.

(10) Y. CHOQUET-BRUHAT, A. FISHER et J. MARSDEN, *Maximal Hypersurfaces and the positivity of Mass* [*Proc. Int. School of Phys. E. Fermi* (à paraître)].

(11) *Cf.* une démonstration dans (10).

I.M.T.A.,
Université Paris VI,
Tour 66,
4, *place Jussieu,*
75005 *Paris*

et

Department of Mathematics,
University of California,
Berkeley,
U.S.A.