C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282 (26 avril 1976) Série A — 867

43

ANALYSE SUR LES VARIÉTÉS. — *Sur le noyau des opérateurs pseudo-différentiels à symbole surjectif et non injectif.* Note (*) de MM. **Jean-Pierre Bourguignon, David G. Ebin et Jerrold E. Marsden**, présentée par M. Laurent Schwartz.

On établit qu'un opérateur pseudo-différentiel à symbole surjectif et non injectif a un noyau de dimension infinie. Deux applications à la relativité générale et à la géométrie riemannienne sont présentées.

1. NOTATIONS. — X désigne une variété C^∞ compacte de dimension n. Son fibré tangent est désigné par TM et son fibré cotangent par T^*M. Des fibrés vectoriels C^∞ sur X sont désignés par E, F ou G; $C^\infty(E)$ est l'espace des sections C^∞ de E et pour s entier $H^s(E)$ le complété de $C^\infty(E)$ pour une norme H^s qui est notée $\| \ \|_s$ (des métriques et des connexions sur X et les fibrés sont supposées choisies; les métriques sont notées avec une seule barre). Si Ω est un ouvert régulier de X, $C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$ désigne l'espace des sections C^∞ de E à support dans $\overline{\Omega}$ et $H_0^s(\overline{\Omega}, E)$ son complété pour une norme H^s.

Si P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre entier m de $C^\infty(E)$ dans $C^\infty(F)$, $\sigma(P)$ désigne son symbole principal. Nous réservons la notation P lorsque P opère de $C^\infty(E)$ dans $C^\infty(F)$; P_s désigne l'extension de P de $H^s(E)$ dans $H^{s-m}(F)$, $P^{\overline{\Omega}}$ la restriction de P à $C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$, $P_s^{\overline{\Omega}}$ l'extension de $P^{\overline{\Omega}}$ à $H_0^s(\overline{\Omega}, E)$.

2. THÉORÈME 1. — *Si* P *est à symbole surjectif et non injectif, alors le noyau de* P *est de dimension infinie.*

Preuve. — Supposons Ker P de dimension finie. Montrons que pour tout $s \geqq 0$, $\operatorname{Ker} P_s = \operatorname{Ker} P$.

D'après ([1]), p. 383 ou ([7]), théorème 7.2, P étant à symbole surjectif et par suite P^* à symbole injectif, Im P^* est facteur direct dans $C^\infty(E)$ et par suite

$$C^\infty(E) = \operatorname{Im} P^* \oplus \operatorname{Ker} P;$$

de plus

$$H^s(E) = \operatorname{Im} P^*_{s+m} \oplus \operatorname{Ker} P_s \quad \text{pour tout } s,$$

les facteurs étant orthogonaux pour le produit scalaire H^0.

Si Ker P_0 était différent de Ker P, alors Im P^* ne serait pas dense dans Im P^*_m, ce qui n'est pas.

Par suite comme $\operatorname{Ker} P \subset \operatorname{Ker} P_s \subset \operatorname{Ker} P_0$ pour tout $s \geqq 0$,

$$\operatorname{Ker} P_s = \operatorname{Ker} P \quad \text{pour tout } s \geqq 0.$$

Soit A un supplémentaire topologique de Ker P dans $H^0(E)$. Notons $A^m = A \cap H^m(E)$. Nous avons

$$H^m(E) = \operatorname{Ker} P \oplus A^m. \tag{1}$$

L'application $P_m : A^m \to P_m(H^m(E)) \subset H^0(E)$ est un isomorphisme, car P_m est continu et bijectif et $P_m(H^m(E))$ fermé dans $H^0(E)$.

Donc si $t \in C^\infty(E)$, alors d'après (1) on peut écrire :

$$t = t' + t'' \quad \text{avec} \quad t' \in \operatorname{Ker} P, \quad t'' \in A^m;$$

de plus il existe une constante c telle que

$$\|t\|_m \leqq (\|t'\|_m + \|t''\|_m) \leqq c(\|t'\|_m + \|P_m t\|_0).$$

Si Ker P est de dimension finie, il existe une constante c telle que pour $t' \in \operatorname{Ker} P$,

$$\|t'\|_m \leqq c\|t'\|_0.$$

Par suite il existe une constante c telle que

$$\|t\|_m \leqq c(\|t\|_0 + \|P_m t\|_0). \tag{2}$$

La preuve s'inspire alors directement des calculs présentés dans ([5]), p. 133.

Soit Ω un domaine de carte et $t \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$. Si pour $\xi_0 \neq 0 \in (R^n)^*$ et $\lambda \in R$, on pose $t_\lambda = e^{i\lambda\langle x, \xi_0\rangle}.t$; alors par définition du symbole principal de P :

$$\lambda^{-m} e^{-i\lambda\langle x, \xi_0\rangle}.P t_\lambda \to \sigma(P)(x, \xi_0)t \quad \text{lorsque } \lambda \to \infty. \tag{3}$$

Évaluons $\|t_\lambda\|_m$. Pour λ assez grand,

$$\|t_\lambda\|_m = \left(\int_{R^n} |\hat{t}(\eta - \lambda\xi_0)|^2 (1 + |\eta|^2)^m d\eta\right)^{1/2} \geqq \lambda^m \|t\|_0.$$

En utilisant (2) et (3), pour λ assez grand, il existe des constantes c telles que

$$\|t\|_0 \leqq c\lambda^{-m}\|t_\lambda\|_m \leqq c\|\sigma(P)(., \xi_0)t\|_0.$$

Comme t est arbitraire dans $C_0^\infty(\overline{\Omega}, E)$, pour tout x dans Ω, pour tout ξ_0 dans $(R^n)^*$, il existe une constante c telle que

$$|t(x)| \leqq c|\sigma(P)(x, \xi_0)(t(x))|.$$

Le symbole $\sigma(P)$ devrait donc être injectif, d'où une contradiction. ∎

Remarque. — Dans le cas où P est un opérateur différentiel et où Ω est un ouvert régulier non vide de X, on prouve de façon tout à fait analogue que Ker $P_m^{\overline{\Omega}}$ est de dimension infinie en se servant de la deuxième partie de la preuve, car toujours d'après ([7]), théorème 7.2, Im P_m^* est fermée dans $H^0(\overline{\Omega}, E)$.

THÉORÈME 2. — *Soit* $L : E \to G$ *un morphisme de fibrés vectoriels* C^∞. *Si le symbole de* P *en restriction à* Ker L *est surjectif mais non injectif, alors l'espace des sections de* Ker L *annulées par* P *est de dimension infinie.*

Preuve. — Lorsqu'on choisit un domaine de carte Ω, pour x dans Ω, dim Ker L_x atteint sa valeur minimale sur un ouvert Ω'. On applique les estimées du théorème 1 sur cet ouvert en restriction auquel Ker L est un fibré.

3. APPLICATION A LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE. — Soit g une métrique riemannienne. δ_g désigne l'adjoint de la dérivée de Lie de la métrique; δ_g est aussi la divergence des 2-tenseurs symétriques calculée au moyen de la dérivation covariante D de Levi-Civita. La trace par rapport à g des 2-tenseurs symétriques est désignée par Tr_g.

PROPOSITION 3. — *Si* dim $X \geqq 3$, *l'espace des champs* C^∞ *de 2-tenseurs symétriques à trace nulle et à divergence nulle* (*resp. de classe* H^1 *à support dans une boule non vide*) *est de dimension infinie.*

Preuve. — On applique la version locale du théorème 2 à $P = \delta_g$ en prenant $E = TZ$, le fibré des 2-tenseurs symétriques à trace nulle et pour F le fibré tangent. Comme $\dim F < \dim E$ dès que $\dim X \geqq 3$, le symbole de P n'est pas injectif.

Pour $h \in \bigcirc^2 T^* X$, $\sigma(P)(\xi) h = -h^\sharp . \xi$ ($h^\sharp$ désigne le 2-tenseur contravariant associé à h par g et . la contraction) qui est clairement surjectif dès que $\dim X \geqq 2$. ∎

COROLLAIRE 4. — *L'espace tangent à l'espace des structures conformes en dimension* $\geqq 3$ *et en particulier en dimension 3 l'espace des « vrais degrés gravitationnels de liberté » sont de dimension infinie.*

Preuve. — En effet tout $h \in C^\infty(\bigcirc^2 T^* X)$ se décompose en $h = h^{TT} + h'$ avec $\mathrm{Tr}_g h^{TT} = 0$, $\delta_g h^{TT} = 0$ et h' tangent à l'orbite de g sous l'action du groupe conforme $\mathscr{D}(X) \times \mathscr{F}^+(X)$, produit semi-direct du groupe des difféomorphismes par le groupe multiplicatif des fonctions positives sur X. ∎

Remarque. — En dimension 2, l'espace des structures conformes s'identifie avec l'espace des structures complexes et alors il est de dimension $6\gamma - 6$ où γ désigne le genre de X.

4. APPLICATION A LA GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE. — Il est classique [*cf.* ([6]), 3.4)] que si $\tau(g)$ désigne la courbure scalaire de g, alors pour $h \in C^\infty(\bigcirc^2 T^* X)$:

$$\frac{d}{d\lambda}(g + \lambda h)_{|\lambda=0} = \tau'_g(h) = \Delta_g \mathrm{Tr}_g h + \delta_g \delta_g h - (\mathrm{Ric}(g), h),$$

où Δ_g désigne le laplacien sur les fonctions et $(\mathrm{Ric}(g), .)$ le produit scalaire avec la courbure de Ricci de g.

COROLLAIRE 5. — *Il existe un espace de dimension infinie de déformations infinitésimales de g préservant la courbure scalaire dans* X (*resp. de classe* H^1 *à support dans une boule non vide*) *dès que* $\dim X \geqq 3$.

error. Why is symbol surj. Eq $\mathrm{Ric}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gives count. ex. But o.k. if g Einstein

Preuve. — On applique le théorème 2 à $E = TZ$, $F = TX$, G le fibré trivial $\mathbf{R} \times X$ et $L = (\mathrm{Ric}(g), .)$. ∎

Dans ([3]), J. Marsden et A. Fischer s'intéressent au problème de la stabilité à la linéarisation, à savoir de l'existence d'une courbe de métriques $g(\lambda)$ issue de g telle que

$$\tau(g(\lambda)) = \tau(g) = \tau_0$$

et que

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda)_{|\lambda=0} = h \text{ donné.}$$

Il est clair que nécessairement $\tau'_g(h) = 0$.

En tant qu'application des métriques sur X dans les fonctions sur X, τ est une submersion sauf aux points où $\tau'^*_g : \mathscr{F}(X) \to C^\infty(\bigcirc^2 T^* X)$ n'est pas injectif [*cf.* ([2])]. Dans le cas général, il y a stabilité [*cf.* ([3])].

PROPOSITION 6 [*cf.* (3) pour des cas particuliers]. - *Si* $\dim X \geq 3$, *il n'y a pas stabilité à la linéarisation aux métriques g où τ n'est pas une submersion.*

Preuve. — Dans (3), A. Fischer et J. Marsden montrent que la condition

$$(4) \qquad \text{« pour tout } f \text{ dans } \operatorname{Ker} \tau_g'^{*}, \int_X f \tau''(h, h) = 0 \text{ »}$$

(où τ'' désigne la dérivée seconde de la courbure scalaire) est une condition nécessaire pour que h dans $\operatorname{Ker} \tau_g'$ soit une direction stable.

Si τ n'est pas une submersion, il existe f C^∞ non nulle telle que $\tau_g'^{*}(f) = 0$. Soit Ω un ouvert de X où f est par exemple positive. Soit S le sous-espace fermé de H^1 (E) de tous les h à support dans $\overline{\Omega}$ et vérifiant $\mathrm{Tr}_g h = 0$, $\delta_g h = 0$ et $(\mathrm{Ric}(g), h) = 0$.

Supposons qu'il y ait stabilité en g; (4) doit être satisfaite pour tout h dans S; d'après la formule donnant τ'' [*cf.* (4)] :

$$\frac{1}{2}\int_X f |Dh|^2 = \int_X f \mathring{R}(h, h),$$

où $\mathring{R}$ est le tenseur de courbure quatre fois contravariant.

La fonction f étant positive sur Ω, on en déduit qu'il existe une constante c telle que pour tout h dans S :

$$\|h\|_1 \leq c \|h\|_0.$$

S étant de dimension infinie d'après le corollaire 5 et la fin de la remarque, il y a une contradiction. ∎

(*) Séance du 1er mars 1976.

(1) M. BERGER et D. G. EBIN, *J. Diff. Geom.*, 3, n° 3, 1969, p. 379-392.
(2) J. P. BOURGUIGNON, *Comp. Math.*, 30, fasc. 1, 1975, p. 1-41.
(3) A. FISCHER et J. MARSDEN, *Linearization Stability of Non-Linear Partial Differential Equations* (*Proc. Symp. Pure Math.*, Stanford, XXVII, 1974, p. 219-263).
(4) A. FISCHER et J. MARSDEN, *Deformations of the Scalar Curvature* [*Duke Math. J.* (à paraître)].
(5) L. HÖRMANDER, *Ann. of Math.*, 83, 1966, p. 129-209.
(6) A. LICHNEROWICZ, *Inst. Hautes Études Sc. Publ. Math.*, n° 10, 1961, p. 293-344.
(8) L. SCHWARTZ, *Equaciones diferenciales parciales elipticas*, Cours à Bogota.

J.-P. B. :
Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, plateau de Palaiseau, 91120 *Palaiseau;*

D. G. E. :
Department of Mathematics S.U.N.Y., Stony Brook, N.Y. 11794, *U.S.A.;*

J. E. M. :
Department of Mathematics, University of California, Berkeley, Ca 94720, *U.S.A.*