

遠心羽根車あるいはペーンレスディフューザに起因する旋回失速と  
羽根車のふれ回り安定性に対する影響の理論解析\*

辻 本 良 信\*\*, A. J. Acosta\*\*\*, C. E. Brennen\*\*\*

## 遠心羽根車あるいはペーンレスディフューザに起因する旋回失速と 羽根車のふれ回り安定性に対する影響の理論解析\*

辻本良信\*\*, A. J. Acosta\*\*\*, C. E. Brennen\*\*\*

### A Theoretical Study of Impeller and/or Vaneless Diffuser Attributed Rotating Stalls and Their Effects on the Whirling Instability of a Centrifugal Impeller

Yoshinobu TSUJIMOTO, Allan J. Acosta, and Christopher E. Brennen

Fluid forces on a centrifugal impeller rotating and whirling in a vaneless diffuser are analysed on the assumption of a two-dimensional inviscid flow. It is assumed that the number of impeller vanes is infinitely large and that the loss in the impeller can be estimated from the steady hydraulic and incidence losses taking into account the delay time of the loss. Further, the pressure at the outlet of the diffuser is assumed to be constant. On these assumptions impeller and/or diffuser attributed rotating stalls are observed, and the effects of parameters affecting the stalls are discussed. It is found that both stalls may cause the whirling instability of a centrifugal impeller.

**Key Words:** Unsteady Flow, Fluid Machine, Centrifugal Impeller, Whirling, Rotating Stall, Vaneless Diffuser

#### 1. 緒 言

ターボ機械のすべり軸受部やシール部に作用する非定常流体力の研究の進展に伴い、遠心羽根車軸系のふれ回り不安定に対する羽根車自体に作用する流体力の寄与について関心が持たれ、最近ふれ回りながら回転する遠心羽根車に作用する非定常流体力に関する研究が進んでいる。

大橋らはペーンレスディフューザ内でふれ回りながら回転する二次元遠心羽根車に作用する流体力を測定し<sup>(1)</sup>、低流量時の比較的小さなふれ回り速度比の場合について、流体力がふれ回りに対して励振的になることを見出した。流量を絞るに従って流体力のふらつきは増大するが、ふらつきは不規則的で旋回失速のような規則的な周波数成分は観測されていない。この実験に対応して正司らは特異点法を用いた二次元ポテンシャル解析により流体力を求め<sup>(2)(3)</sup>、無衝突流入流量付近の流量範囲では実験とよく一致した流体が得られることを示した。解析では流れが翼面に沿い損失がない

ことを仮定しているため、問題となる低流量範囲での計算結果は示されていない。

一方 Acosta ら<sup>(4)(5)</sup>は実機に近い三次元形状を持つ遠心羽根車がポリュート内でふれ回る場合について流体力を測定した。測定された流体力は大橋らのものに比べ非常に大きく、設計流量付近においてもふれ回りに対して励振的となることが見出された。大橋らの実験結果との相異の原因として羽根車が三次元の形状を持つことやポリュートとの干渉効果が考えられるが、著者らは後者に着目し、羽根数無限大の二次元羽根車がポリュート中でふれ回る場合についての非定常解析を行い<sup>(6)</sup>、ポリュートとの干渉が両実験結果の相異を定性的に説明できることを示した。

大橋らの実験においては低流量時の不安定に対する旋回失速の影響は認められなかったが、羽根車あるいはディフューザに起因する旋回失速が生じる場合にはこれが低流量時のふれ回り安定性に対して影響するであろうことは容易に推測される。

遠心羽根車に起因する旋回失速に関しては低周波数騒音との関係もあって実験的研究が行われ<sup>(7)(8)</sup>、また軸流羽根車の旋回失速<sup>(9)(10)</sup>の場合と同等な理論的扱いが可能であるとの予想はつくが、系統的な実験的理論的研究を知見しない。ディフューザに起因する旋回失

\* 昭和61年8月18日 第937回講演会において講演、原稿受付 昭和61年1月22日。

\*\* 正員、大阪大学基礎工学部 (〒560 豊中市待兼山1-1)。

\*\*\* California Institute of Technology (Pasadena, California 91125, USA)。

速の発生に関しては、壁面定常境界層計算<sup>(11)</sup>が実験結果によく一致した限界流入角を与えることが実験的<sup>(12)(13)</sup>に示されているが、セルの伝ば速度に関しては Jansen<sup>(14)</sup>によるポテンシャル流解析の結果が実験との比較にもつばら用いられている。また Abdelhamid<sup>(15)</sup>はディフューザ入口圧力をインピーダンスの形で与え、基礎式を直接数値積分することにより二次元非粘性解析を行った。

本研究では羽根数無限大の二次元遠心羽根車が、有限な内外径比を持つペーンレスディフューザ内でふれ回り運動をする場合を扱う。羽根車内の全圧損失が流動損失と衝突損失の和に遅れ時間を考慮して与えられ、またディフューザ出口で静圧が一定となることを仮定し、羽根車に起因する旋回失速、ディフューザに起因する旋回失速と、これらのふれ回り安定性に及ぼす影響を調べる。偏心量および非定常成分は羽根車外径および定常成分に比べて微小であると仮定し、羽根車外部で流れは非粘性、非圧縮性の二次元流として扱えるものと仮定する。

2. 基本流れの表示式

図1に示すように羽根数無限大、内外半径  $r_1, r_2$  の遠心羽根車が、外半径  $r_3$  のペーンレスディフューザ内で一定の偏心量  $\epsilon$  および角速度  $\omega$  で公転しながら  $\Omega$  の角速度で自転する場合を考える。任意の羽根曲線について扱えるがここでは羽根角  $\beta$  は一定であると考ええる。公転の中心を原点に静止座標  $z = x' + iy' = r'e^{i\theta}$  をとり、羽根車中心を原点に、座標軸を静止座標と平行に保って移動する座標  $z = x + iy = re^{i\theta}$  を考える。 $z'$  座標に対する相対速度(絶対速度)に ' を付け、

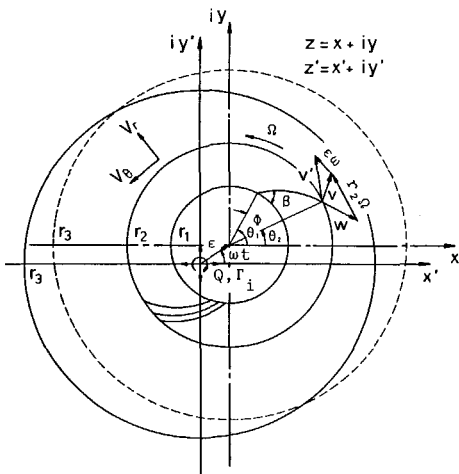


図1 羽根車およびペーンレスディフューザ

これのないものは  $z$  座標に対する相対速度を表す。また、羽根車に対する相対速度を  $w$  で表す。全体の速度、定常速度成分、非定常速度成分を  $v, V$  および  $v_d$  で表し、添字  $p=1, 2, 3$  および  $r, \theta$  で半径位置  $r_1, r_2, r_3$  における値および  $r, \theta$  方向成分を表す。非定常成分は例えば

$$v_{rp_d}(\theta_p) = \bar{v}_{rp} \exp\{j(\omega t - n\theta_p)\}$$

$$v_{op_d}(\theta_p) = \bar{v}_{op} \exp\{j(\omega t - n\theta_p)\}$$

のように時間  $t$  に関する虚数単位  $j$  を用いた複素量で表現し、その実部が物理的意味を持つものとする。  $n$  は旋回失速を扱う場合のセル数であり、偏心運動に対しては  $n=1$  とする。簡単のため、非定常成分は  $\bar{v}_{rp}, \bar{v}_{op}$  等の複素振幅のみで表現する。

2.1 羽根車上流の速度

羽根車上流では流れは非回転であり、流量および予旋回を  $z'$  座標原点の強さ  $Q$  および  $\Gamma_i$  のわき出しおよび渦で表すと、流れは未定数  $A_R - iA_I$  を用いて ( $i$ ; 場所に関する虚数単位)

$$v_r - iv_\theta = \frac{Q + i\Gamma_i}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{z + \epsilon e^{i\omega t}}$$

$$+ (A_R - iA_I) z^{n-1} e^{-i\omega t} e^{i\theta} \dots \dots \dots (1)$$

で表現できる。仮定  $\epsilon \ll r_1$  を用い上式より非定常成分を分離すると、  $r=r_1$  での非定常速度成分は次式で表現できる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{r1} &= -\frac{\epsilon}{2\pi r_1^2} (Q + j\Gamma_i) + \bar{v}_1^* \\ \bar{v}_{\theta 1} &= -j \frac{\epsilon}{2\pi r_1^2} (Q + j\Gamma_i) - j\bar{v}_1^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ただし、  $\bar{v}_1^* = r_1^{n-1} (A_R + jA_I)$  である。

2.2 羽根車下流の速度

羽根車下流では流れの非定常性および羽根車で全圧上昇の不均一により渦度が生じる。いま、渦度が定常速度  $(V_r, V_\theta) = (Q/2\pi r, \Gamma/2\pi r)$  に乗って流れると仮定すると、渦度分布は次式で表現できる ( $\zeta_2$ : 未定数)。

$$\zeta = \bar{\zeta}_2 e^{j\omega t} \lambda(r, \theta)$$

$$\lambda(r, \theta) = \exp \left[ -j \left\{ \omega \frac{\pi}{Q} (r^2 - r_2^2) + n \left( \theta - \frac{\Gamma}{Q} \log \left( \frac{r}{r_2} \right) \right) \right\} \right] \dots \dots \dots (3)$$

ただし  $\Gamma = 2\pi r_2 (r_2 \Omega - Q / (2\pi r_2) \cot \beta)$  は羽根車の定常循環である。このとき流出渦によって誘導される速度  $(v_r^s, v_\theta^s)$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} v_r^s &= \bar{\zeta}_2 (R_R - jR_I) e^{j(\omega t - n\theta)} \\ v_\theta^s &= \bar{\zeta}_2 (\Theta_R - j\Theta_I) e^{j(\omega t - n\theta)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ただし、

$$R_R - jR_I = -j(S + T), \quad \Theta_R - j\Theta_I = S - T$$

$$S(r) = \frac{1}{2} \int_{r_2}^r \lambda(r_0, 0) \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} dr_0$$

$$T(r) = \frac{1}{2} \int_r^{r_3} \lambda(r_0, 0) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} dr_0$$

羽根車出口で羽根車に対する相対速度が羽根に沿うことより非定常成分に対し

$$\bar{v}_{\theta 2} = -\bar{v}_{r 2} \cot \beta \dots\dots\dots (5)$$

の境界条件を得る。流出渦に関係した速度成分が、上記境界条件を満足するよう  $z^{n-1}$  の形のポテンシャル成分を式(4)の速度に重ね合わせると次式を得る。

$$\bar{v}_r^{(6)} = \bar{\zeta}_2 \left[ (R_R - jR_I) - \left(\frac{r_2}{r}\right)^{n+1} e^{-2j\beta} (R_R - jR_I) r_2 \right] \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{v}_\theta^{(6)} = \bar{\zeta}_2 \left[ (\Theta_R - j\Theta_I) - j \left(\frac{r_2}{r}\right)^{n+1} e^{-2j\beta} (R_R - jR_I) r_2 \right]$$

ここでは有限半径のディフューザ内の流れを考えているので  $z^{n-1}$  の形のポテンシャル成分も解として可能である。そこで式(5)の境界条件を満足するよう

$$v_{rd} - i v_{\theta d} = \left[ \bar{A} \left(\frac{z}{r_2}\right)^{n-1} e^{-i\omega t} - \bar{A} \left(\frac{r_2}{z}\right)^{n+1} e^{-2j\beta} e^{i\omega t} \right] e^{i\theta}$$

の速度 ( $\bar{A}$  は未定定数) すなわち

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_r^{(7)} &= \bar{A} \left[ \left(\frac{r}{r_2}\right)^{n-1} - \left(\frac{r_2}{r}\right)^{n+1} e^{-2j\beta} \right] \\ \bar{v}_\theta^{(7)} &= -j\bar{A} \left[ \left(\frac{r}{r_2}\right)^{n-1} + \left(\frac{r_2}{r}\right)^{n+1} e^{-2j\beta} \right] \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

を用い、 $\bar{v}_{r, \theta} = \bar{v}_r^{(6)} + \bar{v}_r^{(7)}$  とする。

以上まとめると羽根車入口の非定常速度は未定定数  $\bar{v}_r$  を用いて式(2)で、羽根車下流の速度は未知量  $\bar{\zeta}_2$  および  $\bar{A}$  を用いて式(6), (7)の和として表現できる。これらの未定定数は、羽根車上・下流の連続の条件、渦度の式およびディフューザ出口での条件より決定することができる。

### 3. 流れ場の決定

**3.1 連続の条件** 特定の羽根曲線の羽根車内、外周での偏角の差を  $\theta_1 - \theta_2 = \cot \beta \log(r_2/r_1) = \Phi$  とすると、非定常成分の羽根車内、外周間での連続の条件は次式で与えられる。

$$r_1 \bar{v}_{r1} = r_2 \bar{v}_{r2} e^{j\Phi} \dots\dots\dots (8)$$

**3.2 渦度の条件** 羽根車に固定した座標系のオイラの式の  $\theta$  方向成分より次式を得る。

$$\partial v_\theta / \partial t^* + \partial H' / r \partial \theta = -V_r \zeta \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $\partial / \partial t^* = \partial / \partial t + \Omega \partial / \partial \theta$ ,  $H' = (1/2) \omega^2 - (1/2) i \omega \epsilon e^{i\omega t} + i r \Omega e^{i\theta} + p/\rho$  であり  $\rho$  は密度であ

る。上式を羽根車外周に適用して考える。羽根車外周での  $H'$  を求めるにあたって、羽根車外周での静圧として、羽根車上流で渦度が零であることを仮定し羽根車に固定した座標でのオイラの式の羽根曲線方向成分を羽根曲線に沿って積分して得られる圧力から、付録で与えられる羽根車内全圧損失  $\Delta p_{td}$  を引いた値を用いる。このとき羽根車外周での渦度は最終的に次式で表現される。

$$\bar{\zeta}_2 = -\frac{1}{r_2 V_{r2}} \left[ j(\omega - n\Omega)(r_2 \bar{v}_{\theta 2} - r_1 \bar{v}_{\theta 1} e^{-jn\Phi}) - Mn(\omega - n\Omega) \bar{v}_{r2} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\Delta p_{td}}{\rho} \right) \right] \dots\dots\dots (10)$$

ただし

$$M = \int_1^2 r_2 / (r \sin \beta) ds = r_2 \sin^{-2} \beta \log(r_2/r_1)$$

であり、全圧損失の非定常成分は付録に示す  $L_1, L_2$  を用い

$$\frac{\Delta p_{td}}{\rho} = \left[ L_1 \bar{v}_{r2} - j L_2 \frac{\epsilon}{2\pi r_1^2} (Q + j\Gamma) e^{-j\theta} \right] \times e^{j(\omega t - n\theta)} \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。この全圧損失は、羽根車の局所的な非定常全圧損失が、等しい流入角を持つ流量係数における定常損失に、損失の時間おくれを考慮して与えられると仮定して得られたものである。また定常損失としては流動損失と衝突損失を考えている。

**3.3 ディフューザ出口の条件** ディフューザ出口は大きな空間につながり、静圧は一定に保たれるものと仮定する。ディフューザ出口 ( $r' = r_3$ ) の絶対速度は

$$\begin{aligned} v_{r3} &= Q / (2\pi r_3) + \left\{ \bar{v}_{r3} + \frac{\epsilon Q}{2\pi r_3^2} + \left( \epsilon \omega - \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi r_3^2} \right) j \right\} e^{j(\omega t - n\theta)} \\ v_{\theta 3} &= \Gamma / (2\pi r_3) + \left\{ \bar{v}_{\theta 3} + \left( \epsilon \omega + \frac{\epsilon \Gamma}{2\pi r_3^2} \right) + \frac{\epsilon Q}{2\pi r_3^2} j \right\} e^{j(\omega t - n\theta)} \end{aligned}$$

で与えられ、これを極座標表示した絶対座標のオイラの式の  $\theta'$  方向成分の式に代入し、 $\partial p / \partial \theta' = 0$  とすることにより次式を得る。

$$\begin{aligned} \left[ j\omega - \frac{\Gamma}{2\pi r_3^2} jn + \frac{Q}{2\pi r_3^2} \right] \bar{v}_{\theta 3} \\ + \frac{Q}{2\pi r_3} [z_a \bar{\zeta}_2 - jz_b \bar{A}] = j\epsilon \left\{ \frac{\Gamma^2 + Q^2}{(2\pi r_3^2)^2} - \omega^2 \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$z_a = \lambda(r_3, 0) - \frac{n+1}{r_3} S(r_3)$$

$$+ j(n+1) \frac{r_2^{n+1}}{r_3^{n+2}} e^{-2j\beta} (R_R - jR_I)_{r_2}$$

$$z_b = \frac{1}{r_3} \left\{ (n-1) \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^{n-1} - (n+1) \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^{n-1} e^{-2j\beta} \right\}$$

式(8), (10), (12)に式(2), (6), (7)を用いると,

$$\tilde{A} = \frac{G(r_2 V_{r_2} - jz_{r_2}) - P_t D}{P_t j A_{r_2} + P_A (r_2 V_{r_2} - jz_{r_2})} \dots\dots\dots (13)$$

$$z_{r_2} = (1 - e^{-2j\beta})(R_R - jR_I)_{r_2}, A_{r_2} = 1 - e^{-2j\beta}$$

$$z_{r_3} = (R_R - jR_I)_{r_3} - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^{n+1} e^{-2j\beta} (R_R - jR_I)_{r_2}$$

$$A_{r_3} = \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{n-1} - \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^{n+1} e^{-2j\beta}$$

$$z_{\theta_3} = (\Theta_R - j\Theta_I)_{r_3} - j \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^{n+1} \times e^{-2j\beta} (R_R - jR_I)_{r_2}$$

$$A_{\theta_3} = -j \left\{ \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{n-1} + \left( \frac{r_2}{r_3} \right)^{n+1} e^{-2j\beta} \right\}$$

$$\tilde{\xi}_2 = \frac{jA_{r_2} \tilde{A} + D}{r_2 V_{r_2} - jz_{r_2}}$$

を得る。ただし,

$$G = j\epsilon \left\{ \frac{\Gamma^2 + Q^2}{(2\pi r_3^2)^2} - \omega^2 \right\}$$

$$J = (\omega - n\Omega) \{ r_2(1 + j \cot \beta) + Mn \} - jnL_1$$

$$D = \epsilon [ (\omega - n\Omega) 2r_1 - L_2 ] \frac{1}{2\pi r_1^2} (Q + j\Gamma_i) e^{-jn\phi}$$

$$P_t = \left( j\omega - \frac{\Gamma}{2\pi r_3^2} jn + \frac{Q}{2\pi r_3^2} \right) z_{\theta_3} + \frac{Q}{2\pi r_3} z_a$$

$$P_A = \left( j\omega - \frac{\Gamma}{2\pi r_3^2} jn + \frac{Q}{2\pi r_3^2} \right) A_{\theta_3} - j \frac{Q}{2\pi r_3} z_b$$

他の未知量は式(13)を(2), (6), (7), (8)に用いることにより容易に求まり, 流れ場が決定される。

4. 羽根車に作用する流体力

羽根車内・外周を検査面にとり, 圧力および流体によって羽根車に流入・出する運動量と, 羽根車内の運動量の時間変化より, 羽根車に作用する流体力の偏心方向(n)および周方向(t)成分(F<sub>n</sub>, F<sub>t</sub>)は次式で与えられる。

$$(F_n + iF_t) / \pi \rho = r_1 \{ r_2 \Omega - \omega(r_2 - r_1 e^{i\phi}) \} e^{-i\phi} \bar{v}_{\theta 1} - r_2^2 \Omega \bar{v}_{\theta 2} + i r_2 \{ M(\omega - \Omega) - \omega \epsilon (r_2 - r_1 e^{i\phi}) \} \bar{v}_{r_2} - r_2 (V_{r_2} + iV_{\theta 2}) (\bar{v}_{r_2} + i\bar{v}_{\theta 2}) + r_1 (V_{r_1} + iV_{\theta 1}) (\bar{v}_{r_1} + i\bar{v}_{\theta 1}) + r_2 \{ L_1 \bar{v}_{r_2} - iL_2 \frac{\epsilon}{2\pi r_1^2} (Q + i\Gamma_i) e^{-i\phi} \} \dots\dots\dots (14)$$

5. 羽根車単体の場合

羽根車から直接圧力一定の空間に吐出される場合には流出渦の影響を考える必要がなく, 取扱いが簡単になる。偏心した羽根車外周上の圧力を, 式(10)を導いたときと同様オイラの式を羽根に沿って積分して求まる値から, 羽根車内の全圧損失を差し引いて求まるものとする次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p_2}{\rho} \right) = -j [ n\Omega r_2 \bar{v}_{\theta 2} + r_1 (\omega - n\Omega) \bar{v}_{\theta 1} e^{-jn\phi} - jMn(\omega - n\Omega) \bar{v}_{r_2} + \epsilon \omega^2 r_2 + \epsilon \omega (V_{\theta 2} + jV_{r_2}) ] + jnL_1 \bar{v}_{r_2} + L_2 \frac{\epsilon}{2\pi r_1^2} (Q + j\Gamma_i) e^{-jn\phi} + jn [ V_{r_2} (\bar{v}_{r_2} + j\epsilon \omega) + V_{\theta 2} (\bar{v}_{\theta 2} + \epsilon \omega) ] \dots\dots\dots (15)$$

上式で(∂/∂θ)(p<sub>2</sub>/ρ)=0とし, 式(2), (5), (8)を用いると次式を得る。

$$\bar{v}_{r_2} = \frac{\epsilon \omega^2 r_2 + j \frac{\epsilon}{2\pi r_1^2} (Q + j\Gamma_i) e^{-jn\phi} \{ L_2 - 2r_1(\omega - \Omega) \}}{nV_{r_2} / \sin^2 \beta + j(\omega - n\Omega)(r_2 + nM) + nL_1} \dots\dots\dots (16)$$

羽根車に起因した旋回失速が生じる条件は, 上式右辺の分母を零と置くことより次式で与えられる。

実部より

$$Z'_{ss} = - \frac{Z_{ss} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \operatorname{cosec}^2 \beta}{\frac{1}{2} \tan \bar{\beta}_1 (X_R + X_I \tan \bar{\beta}_1)} \dots\dots\dots (17)$$

虚部より

$$\frac{\omega}{n} = \Omega - \frac{V_{r_1} \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{2} \tan \bar{\beta}_1 Z'_{ss} (X_I - X_R \tan \bar{\beta}_1)}{r_2 + nM} \dots\dots\dots (18)$$

ここで β<sub>1</sub> は平均相対流入角であり, Z<sub>ss</sub>, Z'<sub>ss</sub> は損失係数およびその微分, X<sub>R</sub>, X<sub>I</sub> は損失のおくれを表す関数で付録で定義される。式(17)は基本的に旋回失速が発生する流量係数を, 式(18)は失速領域の旋回速度を与えるが, X<sub>R</sub>, X<sub>I</sub> は損失の遅れ時間が零でない場合には ω の関数であるため, 流量係数と旋回速度は式(17), (18)を交互に用い

で決定しなければならない。損失に遅れがなく、羽根車内の全圧損失が付録で与えられる流動損失係数  $\zeta^*$  と衝突損失係数  $\zeta_s$  で表されるものとする、式(17)、(18)より旋回失速発生の流動係数  $\varphi$  および旋回速度は

$$\varphi/\varphi_a = \left[ 1 + \frac{\tan^2 \beta}{\zeta_s} \left\{ \zeta^* + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right\} \right]^{-1} \dots\dots\dots(19)$$

$$\omega/n\Omega = 1 - \frac{\varphi}{\varphi_a} \frac{\tan^2 \beta \{ \zeta^* + (r_1/r_2)^2 \sin^2 \beta \}}{[1 + (n/\sin^2 \beta) \log(r_2/r_1)]} \dots\dots\dots(20)$$

で与えられる。ただし  $\varphi_a \equiv (r_1/r_2)^2 \tan \beta$  は無衝突流入流量係数である。式(19)より  $\varphi$  はセル数  $n$  によらないこと、式(20)より旋回速度は  $\tan \beta$  に大きく依存することがわかる。

式(16)より、羽根車のふれ回り速度が、 $n=1$  の旋回失速の回転速度に近付くとき、速度じょう乱および羽根車に作用する流体力が極めて大きくなることかわかる。

6. ディフューザに起因した旋回失速

羽根なしディフューザがある場合の旋回失速は、前章の場合と同様、式(13)第1式の分母 = 0 の条件：

$$E \equiv P_2 J A r_2 + P_A (r_2 V r_2 - J z r_2) = 0 \dots\dots\dots(21)$$

より求まる。上式からはディフューザに起因した旋回失速のみならず、ディフューザが付いた場合の羽根車に起因した旋回失速に対する条件も求まるはずである。ここでは Jansen<sup>(14)</sup> および Abdelhamid<sup>(15)</sup> のディフューザに起因した旋回失速に対する理論との関係について述べる。

6・1 Jansen<sup>(14)</sup> との比較 Jansen は本研究と同様、二次元非粘性非圧縮性流れで変動が微小であると仮定し、線形化した渦輸送の式を解いている。流れ関数を求めるに当たり時間変動項を無視すること [式(3)で  $\omega=0$  とすることに相当] により流れ関数の解析的表示を得ているが、ディフューザ内の接線方向に対する流れ角が小である場合には、特解 [式(5)に相当] が  $r$  に関して激しく変化することよりこれを無視している。また、羽根車の代わりに回転する金網を用いた実験との対応から、ディフューザ出口で  $\partial b/\partial \theta = 0$ 、 $\partial p/\partial r = 0$  の境界条件を用いている。このとき旋回失速は、接線方向から計ったディフューザ内平均流れ角  $\alpha_a$  が零の場合 ( $\varphi/\varphi_a = 0$  に相当) にのみ変動の振幅が一定に保持されるが、 $\alpha_a > 0$  の場合に対しても失速領域の回転速度が与えられており、これが後の研究の比

較対象として用いられている。

流量が羽根車に対する設計流量に近い場合にも  $\alpha_a$  が小さければディフューザに起因した旋回失速が生じ得るので、ディフューザ上流に羽根車がある場合には、Jansen が用いた  $\partial p/\partial r = 0$  の条件をディフューザ出口に用いるより、ディフューザ入口で式(5)の境界条件を用いるのがより妥当であると考えられる。そこで式(7)を式(12)に代入し、 $\xi_2 = 0$ 、 $\varepsilon = 0$  とすると次式を得る。

$$\omega = \frac{n\Gamma}{2\pi r_3^2} \left\{ \left( 1 - \frac{Q}{\Gamma} \frac{2 \sin 2\beta}{R_3^{2n} + R_3^{-2n} + 2 \cos 2\beta} \right) + j \frac{Q}{\Gamma} \frac{R_3^{2n} - R_3^{-2n}}{R_3^{2n} + R_3^{-2n} + 2 \cos 2\beta} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ただし、 $R_3 \equiv r_3/r_2$

上式では、Jansen の結果と同様、 $\tan \alpha_a = Q/\Gamma > 0$  に対し変動は減衰し、振幅が一定に保たれる  $\alpha_a = 0$  の場合の回転速度は Jansen の値に等しくなる。また  $\omega$  の実部は Jansen の結果と同様、 $\alpha_a$  の増大に伴って減少するが、通常式(22)のほうが大きな値を与え、文献(12)の実験結果に近い値を与える。

6・2 Abdelhamid<sup>(15)</sup> との比較 Abdelhamid は

本研究と同様二次元非粘性非圧縮性流れの仮定のもとに、じょう乱が微小であるとして線形化した運動方程式と連続の式を直接数値積分することにより、ディフューザに起因した旋回失速を解析している。ディフューザ出口で  $\partial p/\partial \theta = 0$  の条件を用いるほか、ディフューザ入口で

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_2/\rho \bar{v}_{r2} V_{\theta 2} &\equiv Z_p \\ \bar{v}_{\theta 2}/\bar{v}_{r2} &\equiv Z_u \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

を定義し、 $Z_p, Z_u$  が実数である  $Z_p - Z_u$  面で中立安定線を求めている。このような場合に対しては、式(10)の代わりに式(9)で  $\Omega = 0$ 、 $\varepsilon = 0$  とした式に式(23)を用い、式(6)、(7)、(12)を用いると次式を得る。

$$Z_p = \frac{r_2}{V_{\theta 2}} \frac{P_A V r_2 + (P_A z r_2 - P_t A r_2) J'}{jn(P_A z r_2 - P_t A r_2)} \dots\dots\dots(24)$$

ただし、

$$J' = -j\omega \cot \beta - (jn/r_2)(V r_2 - V_{\theta 2} \cot \beta)$$

本研究では  $Z_u = -\cot \beta$  としている。式(24)右辺は  $\omega$  の複素関数であり、その虚部が零となる  $\omega$  を見出せば実  $Z_p - Z_u$  面での中立安定点が定められる。

Abdelhamid は  $Z_p$  を実として扱っているが、式(15)で  $\varepsilon = 0$  とすれば次式を得る。

$$Z_p = [(V_{\theta 2} - \Omega r_2) \cot \beta - V r_2 - j(\omega - n\Omega) \times (r_2/n + M) - L_1] / V_{\theta 2} \dots\dots\dots(25)$$

上式は羽根車側から決まる  $Z_p$  であり、式(24)と式

(25)を等置すれば当然のことながら式(21)の条件が得られる。

7. 計算結果と考察

計算例として  $r_1/r_2=0.5, \beta=30^\circ$  の羽根車に対し、損失が付録で  $\eta_h=0.9, \alpha=0.5$  として与えられる場合を示す。  $S(r), T(r)$  の数値積分に際しては、  $\Delta r/r_2=1/600$  の積分ピッチの台形則で、誤差が1%以下となるためこの値を用いた。

7.1 羽根車単体の場合 羽根車単体の場合の旋回失速に対する各因子の影響は、  $\alpha=0$  の場合に対する式(19), (20)よりほぼ予測がつくが、図2に  $r_1/r_2=0.5, \beta=30^\circ, 60^\circ$  の羽根車に対し、旋回失速発生流量係数  $\varphi/\varphi_a$  と旋回速度  $\omega/n\Omega$  を、  $\alpha \neq 0$  の場合に対して式(17), (18)を繰返し用いて求めた結果を示す。  $\varphi/\varphi_a$  は  $\alpha \neq 0$  の場合もセル数  $n$  によらず、  $\alpha$  の増加に伴ってわずかに増加する。  $\omega/n\Omega$  も  $\alpha$  の増加に伴って増加する。これは損失のおくれの増加により、流入角変化に対して翼間通路の流れの変化がおくれるため、羽根車に対する伝ば速度が小さくなるためと考えられる。羽根角  $\beta$  が小の場合には  $\omega/n\Omega$  は1に近く、文献(16)の観測結果に一致する。

式(20)より  $\omega/n\Omega$  は  $\tan \beta$  に大きく依存し、  $\beta$  が大ほど  $\omega/n\Omega$  が小となること、また式(19), (20)より  $\zeta \rightarrow 0$  で  $\varphi/\varphi_a \rightarrow 0, \omega/n\Omega \rightarrow 1$  となり衝突損失が旋回失速の主因となることがわかる。セル数  $n$  が大ほど羽根車内流体の慣性によるおくれが大となり、  $\omega/n\Omega$  が大となる。また流動損失が大であれば  $\varphi/\varphi_a$  は小となり、旋回失速は生じにくくなる。

図3に羽根車に作用する流体力の偏心方向 ( $F_h$ ) および接線方向 ( $F_t$ , 反時計回りを正) 成分を  $\rho\pi(r_2\Omega)^2\varepsilon$  で無次元化し、流量係数  $\varphi/\varphi_a$  をパラメータに、ふれ回り速度比  $\omega/\Omega$  を横軸にとって示した。  $F_t$  がふれ回りと同方向であれば流体力はふれ回りに対して励振的となる。式(17), (18)より旋回失速は  $\varphi/\varphi_a=0.355, \omega/\Omega=0.968$  に対して生じることがわかるが、これに近い流量、ふれ回り速度比付近で流体力は大きく変化する。とくに  $\varphi/\varphi_a=0.2, \omega/\Omega=1$  付近で  $F_t$  が正となり、ふれ回りと旋回失速の干渉により流体力が励振的となっている。損失を無視した場合には流量減少に伴い制振性は減るものの、全域で流体力はふれ回りに対して制振的となる。

7.2 ディフューザが付いた場合 内外径比  $r_3/r_2=1.5$  のディフューザ中でふれ回る羽根車に作用する流体力を図4に示す。式(21)からは  $(\varphi/\varphi_a, \omega/\Omega)=(0.252, 0.988)$  および  $(0.438, 0.157)$  の二つの解が得

られ、この付近で流体力は大きく変化している。ディフューザがない場合には前者の速度比に近いものだけが得られていることから、前者は羽根車に起因した旋回失速、後者はディフューザに起因した旋回失速であ

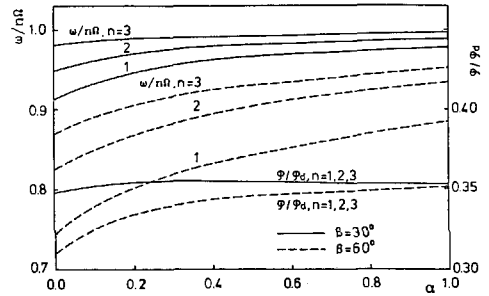


図2 羽根車に起因した旋回失速の発生流量係数  $\varphi/\varphi_a$  と旋回速度  $\omega/n\Omega$  に及ぼす損失おくれ係数  $\alpha$  の影響 ( $r_1/r_2=0.5$ )

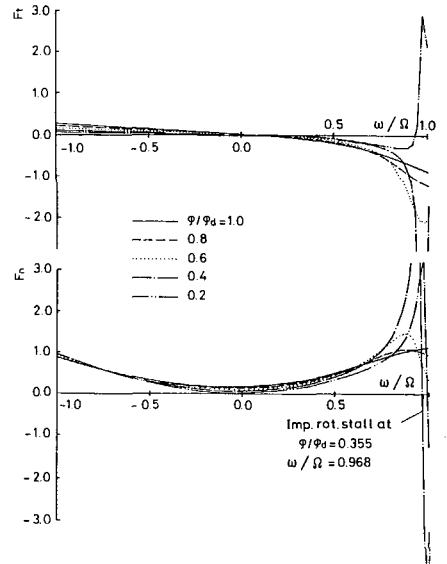


図3 羽根車単体の場合のふれ回り流体力

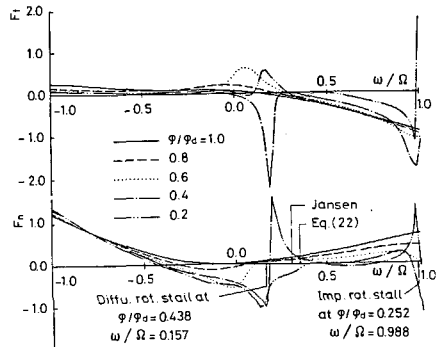


図4  $r_3/r_2=1.5$  の場合のふれ回り流体力

ると考えられる。図中に式(22)および Jansen の結果で  $\varphi/\varphi_d=0.438$  に対応する  $\omega/\Omega$  の実部の値を示した。式(22)や Jansen の結果では  $\varphi/\varphi_d=0$  で中立安定となるが、式(21)からは前述のように正の流量で中立安定が得られ、 $\omega/\Omega$  の値は式(22)や Jansen のものに比べ小さくなっている。なお  $\varphi/\varphi_d=0.438$  に対して  $\alpha_d=4.06^\circ$  であり、実験値<sup>(12)(13)</sup>に比べ小さめである。また羽根車に関係した旋回失速は、ディフューザの追加により発生流量係数が低下し生じ難くなっている。羽根車、ディフューザいずれに起因する旋回失速の場合にも、旋回失速発生点付近で流体力がふれ回りに対して励振的となる領域が生じている。

図5に、同上の条件で羽根車損失を零とした場合の結果を示す。このとき  $\omega/\Omega=1$  付近の流体力の不規則な変化は見られず、羽根車に関係した旋回失速は生じないが、この旋回失速発生点付近以外の流体力は図4のものに近く、流体力に対する羽根車損失の影響は小さいことがわかる。

図6に、 $r_3/r_2=2.0$  のディフューザがついた場合の結果を示す。式(21)からは  $(\varphi/\varphi_d, \omega/\Omega)=(0.245, 0.985), (0.861, -0.005)$  が得られ、羽根車に起因した

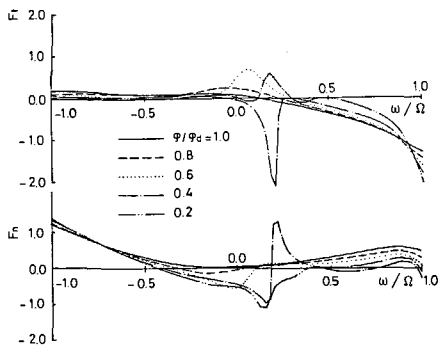


図5  $r_3/r_2=1.5$  の場合のふれ回り流体力 (損失なし)

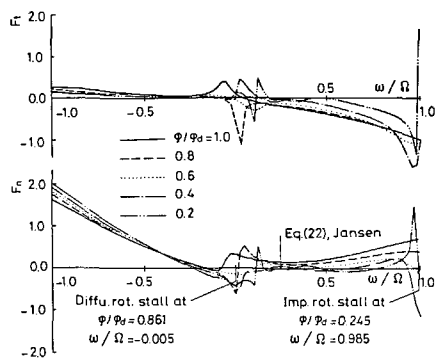


図6  $r_3/r_2=2.0$  の場合のふれ回り流体力

旋回失速は  $r_3/r_2=1.5$  の場合とほとんど変わらない。これに対しディフューザに起因するものの流量係数は増加、旋回速度は減少している。この付近で流体力は激しく変化するが、その変化量は図4のものに比べ小さくなっている。さらに  $r_3/r_2$  を大にすると流体力の変化量はさらに小さく、変動の領域は  $\omega/\Omega=0$  付近に限られるようになる。また  $\omega/\Omega=-1$  付近での  $F_n$  は  $r_3/r_2$  が大ほど大となるが、これは羽根車の横振動に対する付加質量が増大するためと考えられる。

**7.3 ディフューザに起因した旋回失速に対する Abdelhamid の結果との比較** 図7に  $r_3/r_2=1.6, \alpha_d=14^\circ, \beta=15^\circ$  に対し式(24)で与えられる  $Z_p$  を、セル数  $n=1, 2, 3$  に対し  $\omega/\Omega$  をパラメータに複素表示したものを示す。Abdelhamid<sup>(15)</sup>は実  $Z_p-Z_u$  面で中立安定線を図示しているが、この図より  $Z_u=-\cot 15^\circ=-3.73$  に対する  $Z_p$  の値を読み取り、図7中に示した。Imag( $Z_p$ )=0 となる Real( $Z_p$ ) の値とほぼ一致している。

流出渦の影響を考慮し、同じ境界条件を用いた Abdelhamid の結果とは一致するものの、前節で述べたように式(21)で予測されるディフューザに起因する旋回失速の回転速度、限界流れ角は実験値に比べて小さい。流出渦の影響を無視した式(22)あるいは Jansen の解析では限界流入角は零となり、実験事実とは一致しないが、Jansen は実験との対比において、ディフューザ壁面に生じる逆流の影響を指摘し、実際、妹尾ら<sup>(11)</sup>が示したように定常境界層計算は実験によく一致した限界流入角を与える。実際の現象は本解析に見られるような非粘性流としての不安定と、壁面境界層内の逆流が互いに影響し合っていると思われる。本研究で見られるディフューザに起因した旋回失速は実際に生じる旋回失速のある局面のみを表していると考えらるべきであろう。

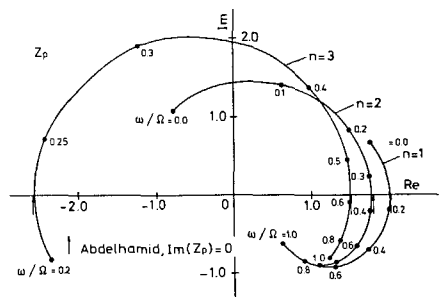


図7 ディフューザに起因する旋回失速発生時のディフューザ入口インピーダンス ( $r_3/r_2=1.6, \alpha_d=14^\circ, \beta=15^\circ$ )



## 8. 結 言

本研究により以下の知見が得られた。

(1) 流量およびふれ回り速度が羽根車あるいはディフューザに起因する旋回失速を生じる流量、失速の旋回速度に近い場合には、ふれ回りと旋回失速の干渉により羽根車に作用する流体力がふれ回りに対して励振的となる場合が生じる。

(2) 羽根車の非定常損失を定常の流動損失と衝突損失におくれ時間を考慮して与えることにより、羽根車に起因する旋回失速の予測式を与え、各要因の影響について検討を加えた。ペーンレスディフューザをつけることにより羽根車に起因する旋回失速は生じ難くなる。

(3) 流出渦の影響を無視し、ディフューザ入口で羽根車出口の接線流の条件が満足されたとした場合のディフューザに起因した旋回失速の回転速度の予測式を与えた。流出渦の影響を考慮した場合には有限な流れ角で旋回失速の発生が予測されるが、その回転速度や限界流入角は実験のものに比べて小さい。

(4) 羽根車内の全圧損失が、羽根車に起因した旋回失速発生点以外でのふれ回り流体力に及ぼす影響や、ディフューザに起因した旋回失速に及ぼす影響は小さい。

本研究の遂行にあたり終始暖かいご激励とご助言をいただいた大阪大学 今市憲作、村田暹両名誉教授および有益な討論をいただいた鶴崎展博士に心から感謝する。また数値計算および図面作製にご助力いただいた大学院生 高次聡氏に感謝する。

## 付録. 羽根車内非定常全圧損失の評価

羽根車内の非定常全圧損失は、定常の場合の全圧損失におくれ時間を考慮して与えられるものとする。定常全圧損失として流動損失と衝突損失を考え、全圧損失が定常の場合に対し

$$\frac{\Delta p_t}{\rho} = \left\{ \zeta_s \left( \frac{1}{t_a} - \frac{1}{t_{ad}} \right)^2 + \zeta^* \right\} \frac{v_{r1}^2}{2}$$

$$\equiv Z_{ss}(t_a) \frac{v_{r1}^2}{2}$$

で与えられるものとする。ただし  $t_a = \tan \bar{\beta}_1$ ,  $t_{ad} = \tan \beta$  であり、 $\bar{\beta}_1$  は平均相対流入角で、流動および衝突損

失係数  $\zeta^*$ ,  $\zeta_s$  は次式で与える。

$$\zeta^* = 2(1 - \eta_n) \frac{1 - \varphi_a \cot \beta \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2}{\varphi_a^2}$$

$$\zeta_s = 0.3 + 0.6\beta^\circ / 90^\circ$$

ただし  $\varphi_a$ ,  $\eta_n$  は無衝突流入時の流量係数と羽根車効率であり、 $\zeta_s$  は文献(17)による。

いま、軸流の場合<sup>(9)(10)</sup>と同様非定常の場合の損失が

$$\frac{\Delta p_t}{\rho} = Z \cdot \frac{1}{2} v_{r1}^2$$

で与えられ、損失係数  $Z$  がおくれ時間  $\tau$  を用い

$$\tau \frac{dZ}{dt} = Z_{ss} - Z$$

で与えられるものとし、変動が微小であるとする、全圧損失の非定常成分として式(11)を得る。ただし

$$L_1 = V_{r1} \frac{r_2}{r_1} \left\{ \frac{1}{2} \tan \bar{\beta}_1 Z'_{ss} X \frac{e^{-j\bar{\beta}_1}}{\cos \bar{\beta}_1} + Z_{ss} \right\}$$

$$L_2 = V_{r1} Z_{ss} X \tan^2 \bar{\beta}_1$$

ただし、 $Z'_{ss} = dZ_{ss}/dt_a$

$$X = X_R + jX_I = [1 + j(\omega - n\Omega)i]^{-1}$$

またおくれ時間  $\tau$  が、流体が羽根車を通過するのに要する時間の  $\alpha$  倍として与えられる場合には、

$$\Omega\tau = \alpha \{1 - (r_1/r_2)^2\} / (2\varphi)$$

( $\varphi$  は流量係数) で与えられ、軸流の場合  $\alpha$  はほぼ 1/2 とされておりここでもこの値を基準に用いる。

## 文 献

- (1) 大橋・正司・加藤, 機論, 51-467, B (昭60), 2373.
- (2) 正司・大橋, 機論, 47-419, B (昭56), 1187.
- (3) 正司・大橋, 機論, 50-458, B (昭59), 2518.
- (4) Chawieh, D., ほか3名, *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, 107 (1985-9), 307.
- (5) Jery, B., ほか3名, *NASA CP*, 2338 (1984), 137.
- (6) 辻本, Acosta, A. J. and Brennen, C. E., 機論, 52-481, B (昭61), 3159.
- (7) 村田・久保, 機論, 42-353 (昭51), 187.
- (8) 鈴木・鶴飼・原田, 機論, 43-377 (昭52), 3020.
- (9) 高田・岡崎, 機論, 26-171 (昭35), 1598.
- (10) 高田・永野, 機論, 37-296 (昭46), 687.
- (11) 妹尾・木下・石田, 機論, 43-367 (昭52), 987.
- (12) Kinoshita, Y., and Senoo, Y., *ASME Power*, 107 (1985), 514.
- (13) 鶴崎・今市・三宅, 機論, 52-480, B (昭61), 2930.
- (14) Jansen, W., *ASME J. Basic Eng.*, 86-4 (1964), 750.
- (15) Abdel hamid, Amr N., *ASME Paper*, 80-GT-184 (1980).
- (16) Acosta, A. J. and Bownan, R. D., *ASME Trans.*, 79-8 (1957), 1821.
- (17) 生井・遠心, 軸流圧縮機と送風機, (昭35), 172, 朝倉書店.